PRIRUČNIK AUDITORNIH VJEŽBI ZA KOLEGIJE IZ TEORIJE KOMUNIKACIJA

Pripremila: izv. prof. dr. sc. Adriana Lipovac

SVEUČILIŠTE U DUBROVNIKU
UNIVERSITY OF DUBROVNIK

IZDAVAČ
Sveučilište u Dubrovniku
Branitelja Dubrovnika 29, 20000 Dubrovnik
http://www.unidu.hr

ZA IZDAVAČA
prof. dr. sc. Nikša Burum

RECENZENTI
prof. dr. sc. Borivoj Modlic
doc. dr. sc. Pamela Njemčević
doc. dr. sc. Anamaria Bjelopera

LEKTOR
dr. sc. Antun Česko

GRAFIČKA I TEHNIČKA OBRADA
Katarina Banović, mag. oec.

DIZAJN NASLOVNICE
Katarina Banović, mag. oec.

Odlukom Senata Sveučilišta u Dubrovniku od 30. rujna 2020. ova je knjiga prihvaćena za objavu.

ISBN 978-953-7153-53-3 (Sveučilište u Dubrovniku)

Izv. prof. dr. sc. Adriana Lipovac

PRIRUČNIK AUDITORNIH VJEŽBI ZA KOLEGIJE IZ TEORIJE KOMUNIKACIJA

SVEUČILIŠTE U DUBROVNIKU
ODJEL ZA ELEKTROTEHNIKU I RAČUNARSTVO

2020.

PREDGOVOR

U ovome priručniku predstavljeni su riješeni zadatci koje sam u proteklih nekoliko godina obrađivala kao karakteristične primjere koji dopunjuju teorijski dio nastave na predavanjima iz kolegija Osnove komunikacija i Statistička teorija telekomunikacija, studija Elektrotehničke i komunikacijske tehnologije u pomorstvu, ili u sklopu ovim kolegijima pripadajućih auditornih vježbi.

Zadatke sam podijelila sukladno karakterističnim cjelinama u kurikulumima predmetnih kolegija, ali i prema saznanjima što sam ih stekla prateći kako studenti usvajaju gradivo.

Terminološke nedoumice koje proizlaze iz činjenice da su Teorija vjerojatnosti, jednako kao i Statistika, puno starije od njihove primjene u komunikacijskim modelima, navele su me da na početku teksta najprije definiram osnovne pojmove iz ovih grana matematičke znanosti, a zatim ih primijenim s inženjerskom vokacijom.

Dubrovnik, lipanj 2020.

Adriana Lipovac

SADRŽAJ

1.

UVOD U VJEROJATNOST

Slučajni eksperiment – eksperiment kojemu ishod nije unaprijed poznat.

Primjer: bacanje novčića ili kocke; mjerenje prijamne snage signala koji je prošao kroz prijenosni medij; mjerenje vršne snage šuma u nekom pojasu frekvencija...

Slučajni događaj – kolekcija ishoda slučajnog eksperimenta.

Primjer: neparan broj točkica pri bacanju kocke; trenutni napon

Vjerojatnost – broj između 0 i 1 (ili 0 % i 100 %) koji opisuje svaki slučajni događaj.

$$P(A) = \frac{broj\ povoljnih\ ishoda}{ukupan\ broj\ ishoda}$$

Izraz daje vjerojatnost da se dogodio događaj *A*.

Pitanje: Kolika je vjerojatnost da se dobije neparan broj točkica prilikom bacanja kockice? Pretpostavlja se da je kockica idealnog oblika.

Odgovor: Broj povoljnih ishoda je 3 (mogući brojevi 1, 3, 5). Ukupni broj ishoda je 6 (6 brojeva na kockici). Dakle, odgovor je: 3/6, ili 1/2.

Osobine vjerojatnosti

Neka je *A* slučajni događaj kojega je vjerojatnost *P(A) = p*. Za suprotan događaj $\bar{A}$ vrijedi:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

to jest:

$$P(\bar{A}) = q = 1 - p$$

Drugim riječima, unija događaja *A* i $\bar{A}$ predstavlja *siguran događaj*. Jedan od ta dva događaja će se sigurno dogoditi, a vjerojatnost sigurnog događaja je 1 (dakle 100 %). Također, događaji *A* i $\bar{A}$ su *međusobno isključivi*, što znači da, ako se dogodi jedan, ovaj drugi sigurno neće.

Kad ne postoje samo dva ishoda, to jest događaja (A i $\bar{A}$), nego više međusobno isključivih događaja: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, za njih vrijedi:

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n) = 1$$

To znači da, ako se dogodi jedan od ovih događaja, ostali sigurno neće. (Primjer: kad se baca kockica, ona će pasti samo na jednu stranu, dakle pokazat će jedan broj od mogućih šest).

Uvjetna vjerojatnost

U realnim situacijama~~,~~ postoji mnogo događaja kojima pojavljivanje ovisi o tome je li se prethodno dogodio neki drugi događaj. Za njihov opis, koristi se *uvjetnim vjerojatnostima*. Uvjetna vjerojatnost $P(B \mid A)$ znači vjerojatnost da će se dogoditi neki događaj B, ako se već dogodio događaj A. Upravo to što se dogodio događaj A, utječe na vjerojatnost pojavljivanja događaja B (a analogno se može defnirati i aposterirorna vjerojatnost da je ustanovljenu pojavu događaja B uzrokovala prethodna pojava događaja A), pa su A i B međusobno *ovisni* događaji.

Zajednička vjerojatnost

Vjerojatnost *zajedničke* pojave dva (ili više) događaja (npr. A i B) određuje se, u općem slučaju, kao:

$$P(A, B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B, A)$$

gdje su $P(A)$ i $P(B)$ vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih događaja A i B.

Bayesova formula

Neka je $\{A_k\}$ potpun skup međusobno isključivih događaja. Za bilo koji događaj B onda vrijedi:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

Neovisnost slučajnih događaja

Za slučajne događaje A i B kaže se da su *neovisni* ako je vjerojatnost zajedničkog događaja jednaka proizvodu vjerojatnosti pojedinih događaja.

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Tada je:

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

to jest:

$$P(B|A) = P(B)$$

Zadatci za vježbu

Zadatak 1.1.

Baca se igraća kockica s brojevima od 1 do 6.

a) Kolika je vjerojatnost da se pojavi broj 2?
b) Kolika je vjerojatnost da se pojavi paran broj?
c) Kolika je vjerojatnost da se pojavi broj veći od 3?
d) Kolika je vjerojatnost da se pojavi broj između 2 i 5?
e) Kolika je vjerojatnost da se pojavi broj manji ili jednak 4?

Rješenje:

Igraća kockica ima 6 strana, i svaka strana obilježena je brojem od 1 do 6. Događaji opisani pojavljivanjem nekoga od mogućih brojeva čine skup međusobno isključivih događaja.

Sigurno vrijedi:

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(6) = 1$$

Ako se uzme u obzir samo slučaj u kojem je kockica geometrijski savršeno oblikovana i jednake gustoće materijala u svakom dijelu njenog volumena, tada vrijedi:

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{1}{6}$$

Dakle, vjerojatnosti pojavljivanja bilo kojeg broja od 1 do 6, u jednom bacanju, međusobno su jednake i iznose $\frac{1}{6}$.

a) Vjerojatnost da se pojavi broj 2 jednaka je vjerojatnosti da se pojavi bilo koji drugi broj iz skupa mogućih brojeva, to jest:

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

b) Parni brojevi koji se mogu pojaviti su 2, 4 i 6, pa je onda vjerojatnost pojavljivanja parnog broja jednaka:

$$P(parni\ broj) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

c) Brojevi veći od 3 koji se mogu pojaviti su 4, 5 i 6, pa je onda vjerojatnost pojavljivanja nekoga od njih:

$$P(broj > 3) = P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

d) Brojevi između 2 i 5 koji se mogu pojaviti su 3 i 4, pa je onda vjerojatnost pojavljivanja nekoga od njih:

$$P(2 < broj < 5) = P(3) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

e) Brojevi manji ili jednaki 4 koji se mogu pojaviti su 1, 2, 3, i 4, pa je onda vjerojatnost pojavljivanja nekog od njih:

$$P(broj \leq 4) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Zadatak 1.2.

Baca se novčić. Mogući ishodi su pismo (P) i glava (G).

a) Ako se kockica baci samo jednom, kolika je vjerojatnost da se pojavi pismo (P), ili glava (G)?

b) Ako se kockica baci dvaput, kolika je vjerojatnost da:

- prvo padne pismo (P), pa zatim opet pismo (P)?
- prvo padne pismo (P), pa zatim glava (G)?
- padnu i pismo (P) i glava (G) (nebitno kojim redoslijedom)?

Rješenje:

a) Ako se radi o geometrijski savršeno oblikovanom novčiću, vjerojatnosti mogućih ishoda bit će međusobno jednake:

$$P(\mathrm{P}) + P(\mathrm{G}) = 1$$

$$P(\mathrm{P}) = P(\mathrm{G}) = \frac{1}{2}$$

b) Događaji su međusobno neovisni pa vrijedi:

$$P(\mathrm{P}, \mathrm{P}) = P(\mathrm{P}) \cdot P(\mathrm{P}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{P}, \mathrm{G}) = P(\mathrm{P}) \cdot P(\mathrm{G}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{P}, \mathrm{G}) + P(\mathrm{G}, \mathrm{P}) = P(\mathrm{P}) \cdot P(\mathrm{G}) + P(\mathrm{G}) \cdot P(\mathrm{P}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Zadatak 1.3.

Tri igrača bacaju novčić (svaki jedanput).

a) Kolika je vjerojatnost da se svima pojavi pismo (P)?
b) Kolika je vjerojatnost da se samo jednom pojavi pismo (P)?
c) Kolika je vjerojatnost da se pojavi pismo (P) u bilo kojem bacanju?

Rješenje:

a) Događaji su međusobno neovisni, pa vrijedi:

$$P(\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{P}) = P(\mathrm{P})\cdot P(\mathrm{P})\cdot P(\mathrm{P}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

b) Mogući ishodi u kojima se pojavljuje samo jedno pismo su kombinacije: PGG, GPG, GGP, pa je vjerojatnost pojavljivanja samo jednog pisma jednaka:

$$P(\mathrm{P},\mathrm{G},\mathrm{G}) + P(\mathrm{G},\mathrm{P},\mathrm{G}) + P(\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{P}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

c) Mogući ishodi u kojima se pojavljuje barem jedno pismo su kombinacije: GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP, pa je vjerojatnost pojavljivanja barem jednog pisma jednaka:

$$P(\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{P}) + P(\mathrm{G},\mathrm{P},\mathrm{G}) + P(\mathrm{G},\mathrm{P},\mathrm{P}) + P(\mathrm{P},\mathrm{G},\mathrm{G}) + P(\mathrm{P},\mathrm{G},\mathrm{P}) + P(\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{G}) + P(\mathrm{P},\mathrm{P},\mathrm{P}) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

Važno je uočiti da zapravo samo jedna kombinacija (ona u kojoj se u svakom bacanju pojavi glava) ne spada u opisani slučajni događaj, pa se tražena vjerojatnost mogla izračunati i na sljedeći način:

$$1 - P(\mathrm{G},\mathrm{G},\mathrm{G}) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

Zadatak 1.4.

Neki izvor emitira poruke koje se sastoje od znakova 0 i 1. Vjerojatnost emitiranja znaka 1 je 0,6. Na izlazu kanala 10% znakova se pogrešno interpretira.

a) Kolika je vjerojatnost da je primljen znak 0 nakon što je on i poslan?
b) Kolika je vjerojatnost da je primljen znak 1 nakon što je on i poslan?
c) Kolika je vjerojatnost da je primljen znak 0?
d) Kolika je vjerojatnost da je primljen znak 1?
e) Kolika je vjerojatnost da je poslan znak 0 nakon što je on i primljen?
f) Kolika je vjerojatnost da je poslan znak 1 nakon što je on i primljen?
g) Ako je primljena poruka 101, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?
h) Ako je primljena poruka 1100, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?

Rješenje:

Radi lakšeg daljnjeg snalaženja, događaje ćemo označiti na sljedeći način:

- događaj „primljen znak 0“: A
- događaj „primljen znak 1“: B
- događaj „poslan znak 0“: a
- događaj „poslan znak 1“: b

U zadatku su zadane apriorna vjerojatnost: $P(\mathrm{b}) = 0{,}6$ i uvjetne vjerojatnosti pogrešne interpretacije simbola na prijamu: $P(\mathrm{A}|\mathrm{b}) = P(\mathrm{B}|\mathrm{a}) = 0{,}1$.

Budući da su događaji a i b međusobno isključivi, vrijedi:

$$P(\mathrm{a}) = 1 - P(\mathrm{b}) = 0{,}4$$

Analogno prethodnome, vrijedi i:

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{a}) = 1 - P(\mathrm{B}|\mathrm{a}) = 0{,}9$$

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{b}) = 1 - P(\mathrm{A}|\mathrm{b}) = 0{,}9$$

a) Vjerojatnost da je primljen znak 0 nakon što je on i poslan jednaka je uvjetnoj vjerojatnosti ispravnog prijenosa za znak 0 i iznosi:

$$P(\mathrm{A}|\mathrm{a}) = 1 - P(\mathrm{B}|\mathrm{a}) = 0{,}9$$

b) Vjerojatnost da je primljen znak 1 nakon što je on i poslan jednaka je uvjetnoj vjerojatnosti ispravnog prijenosa za znak 1 i iznosi:

$$P(\mathrm{B}|\mathrm{b}) = 1 - P(\mathrm{A}|\mathrm{b}) = 0{,}9$$

c) Vjerojatnost da je primljen znak 0 jednaka je zbroju vjerojatnosti u slučajevima ispravnog i neispravnog prijenosa:

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{a}) \cdot P(\mathrm{A}|\mathrm{a}) + P(\mathrm{b}) \cdot P(\mathrm{A}|\mathrm{b}) = 0{,}4 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 0{,}42$$

d) Vjerojatnost da je primljen znak 1 jednaka je zbroju vjerojatnosti u slučajevima ispravnog i neispravnog prijenosa:

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{b}) \cdot P(\mathrm{B}|\mathrm{b}) + P(\mathrm{a}) \cdot P(\mathrm{B}|\mathrm{a}) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}58$$

Zadatak 1.5.

Student Mato Matić postigao je sljedeći uspjeh u prvom semestru na drugoj godini studija:

Predmet	**Ocjena**
Matematika III.	Dobar (3)
Digitalna elektronika	Vrlo dobar (4)
Brodski električni strojevi i sustavi	Vrlo dobar (4)
Osnove automatizacije	Dovoljan (2)
Osnove komunikacija	Dobar (3)
Engleski II.	Izvrstan (5)
Pomorsko pravo i havarije	Dobar (3)

Izračunati prosječnu ocjenu njegova studiranja u tom semestru. Koristit će se izraz za očekivanu vrijednost i teoriju vjerojatnosti.

Rješenje:

Učestalosti i vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih ocjena iznose:

$$P(2) = \frac{1}{7}$$

$$P(3) = \frac{3}{7}$$

$$P(4) = \frac{2}{7}$$

$$P(5) = \frac{1}{7}$$

Prosječna je ocjena:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} = 3{,}43$$

2.

IZVOR INFORMACIJE

Količina informacije

Da bi se informacija mogla kvantitativno opisati, mora se prikazati brojem. U takvu se obliku informacija može tretirati poput bilo koje fizikalne veličine (puta, brzine, energije, itd.), kvalitativno i kvantitativno.

Neka je korisnik zainteresiran za neko određeno stanje s izvora informacija, i neka poznaje vjerojatnost $P(s)$, te očekuje poruku s da je baš to stanje nastupilo.

Količina informacije koju nosi neka poruka jednaka je neizvjesnosti koju ta poruka razrješava na prijamu (nakon što je primljena):

$$Q(s) \cong \log \frac{1}{P(s)} = -\log P(s)$$

Ako postoje dvije statistički neovisne poruke s_i i s_j sa zadanim vjerojatnostima $P(s_i)$ i $P(s_j)$, i ako se nova poruka sastoji od uzastopno emitiranih navedenih pojedinačnih poruka, tada se može očekivati da će združena poruka nositi količinu informacija jednaku zbroju količina informacija ovih dviju neovisnih poruka. Za prethodno zadanu definiju količine informacija, to je nedvojbeno ispunjeno:

$$Q(s_i, s_j) = \log \frac{1}{P(s_i, s_j)} = \log \frac{1}{P(s_i) \cdot P(s_j)} = \log \frac{1}{P(s_i)} + \log \frac{1}{P(s_j)} = Q(s_i) + Q(s_j)$$

jer je logaritamska funkcija jedina s osobinom:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Alternativne definicije količine informacija su:

$$Q(s) \cong \log_{10} \frac{1}{P(s)} \quad [\text{Hartley}]$$

$$Q(s) \cong \ln \frac{1}{P(s)} \quad [\text{nat}]$$

ali danas se gotovo redovito koristi sljedećom:

$$Q(s) \cong \log_2 \frac{1}{P(s)} = \text{ld} \frac{1}{P(s)} \quad [\text{Sh}]$$

Entropija

Neka je lista simbola koju emitira diskretni izvor informacija: $S\,\{s_1, s_2, \dots, s_q\}$, pri čemu su vjerojatnosti pojavljivanja pojedinih simbola $P(s_i)$, $(i = 1,2, \dots, q)$ i mora biti ispunjeno $\sum_{i=1}^{q} P(s_i) = 1$. Tada su količine informacija koje nose pojedini simboli:

$$Q(s_i) = \mathrm{ld}\,\frac{1}{P(s_i)} \quad [\mathrm{Sh}] \qquad (i = 1,2, \dots, q)$$

Prosječna količina informacija koju izvor emitira (prosječno) po jednom simbolu:

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} P(s_i) \cdot \mathrm{ld}\,\frac{1}{P(s_i)} = -\sum_{i=1}^{q} P(s_i) \cdot \mathrm{ld}\,P(s_i) \quad \left[\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}\right]$$

naziva se <u>entropija</u> i označava prosječnu vrijednost neizvjesnosti po jednom simbolu izvora.

Informacija postoji na izvoru. Prije slanja poruke, na odredištu postoji neodređenost (ne znamo što će se poslati). Nakon što se poruka pošalje, ta neodređenost na odredištu nestaje. Entropija je upravo mjera neodređenosti na odredištu.

Zadatci za vježbu

Zadatak 2.1.

Diskretni izvor bez memorije emitira simbole 0 i 1 s apriornim vjerojatnostima $P(0) = 0{,}6$ i $P(1) = 0{,}4$. Treba odrediti količinu informacija koju nose oba simbola i entropiju izvora.

<u>Rješenje:</u>

Količine informacija koje nose pojedini simboli iznose:

$$Q(0) = \mathrm{ld}\,\frac{1}{P(0)} = \mathrm{ld}\,\frac{1}{0{,}6} = 0{,}737\ \mathrm{Sh}$$

$$Q(1) = \mathrm{ld}\,\frac{1}{P(1)} = \mathrm{ld}\,\frac{1}{0{,}4} = 1{,}322\ \mathrm{Sh}$$

Entropija izvora prosječna je količina inoformacija koju nose simboli i računa se na sljedeći način:

$$H(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{2} P(s_i) \cdot Q(s_i) = P(0) \cdot Q(0) + P(1) \cdot Q(1) = 0{,}971\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Zadatak 2.2.

Diskretni izvor bez memorije emitira tri simbola sa zadanim apriornim vjerojatnostima
$P(s_1)=\frac{1}{2}$, $P(s_2)=\frac{1}{4}$, $P(s_3)=\frac{1}{4}$. Izračunajte entropiju izvora $H(\mathrm{S})$.

Rješenje:

Entropija izvora računa se na sljedeći način:

$$H(\mathrm{S})=\sum_{i=1}^{n}P(s_i)\cdot Q(s_i)=\sum_{i=1}^{n}P(s_i)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_i)}$$

$$\begin{aligned}H(\mathrm{S})&=P(s_1)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_1)}+P(s_2)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_2)}+P(s_3)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_3)}\\&=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{ld}\,2+\frac{1}{4}\cdot \mathrm{ld}\,4+\frac{1}{4}\cdot \mathrm{ld}\,4=1{,}5\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}\end{aligned}$$

Zadatak 2.3.

Diskretni izvor bez memorije emitira tri simbola. Odredite entropiju izvora $H(\mathrm{S}^2)$ ako se promatraju parovi simbola sa zadanim zajedničkim vjerojatnostima:

$P(s_1,s_1)=\frac{1}{4}$	$P(s_2,s_1)=\frac{1}{8}$	$P(s_3,s_1)=\frac{1}{8}$
$P(s_1,s_2)=\frac{1}{8}$	$P(s_2,s_2)=\frac{1}{16}$	$P(s_3,s_2)=\frac{1}{16}$
$P(s_1,s_3)=\frac{1}{8}$	$P(s_2,s_3)=\frac{1}{16}$	$P(s_3,s_3)=\frac{1}{16}$

Rješenje:

Entropija izvora računa se na sljedeći način:

$$H(\mathrm{S}^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P(s_i,s_j)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_i,s_j)}$$

$$\begin{aligned}H(\mathrm{S}^2)&=P(s_1,s_1)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_1,s_1)}+P(s_1,s_2)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_1,s_2)}+P(s_1,s_3)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_1,s_3)}\\&+P(s_2,s_1)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_2,s_1)}+P(s_2,s_2)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_2,s_2)}+P(s_2,s_3)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_2,s_3)}\\&+P(s_3,s_1)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_3,s_1)}+P(s_3,s_2)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_3,s_2)}+P(s_3,s_3)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_3,s_3)}\\&=\frac{1}{4}\cdot \mathrm{ld}\,4+\frac{1}{8}\cdot \mathrm{ld}\,8+\frac{1}{8}\cdot \mathrm{ld}\,8+\frac{1}{8}\cdot \mathrm{ld}\,8+\frac{1}{16}\cdot \mathrm{ld}\,16+\frac{1}{16}\cdot \mathrm{ld}\,16+\frac{1}{8}\cdot \mathrm{ld}\,8\\&+\frac{1}{16}\cdot \mathrm{ld}\,16+\frac{1}{16}\cdot \mathrm{ld}\,16=3\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}\end{aligned}$$

Drugi, lakši, način za proračun entropije istog (proširenog izvora) sastoji se od računanja entropije prvobitnog neproširenog izvora $H(\mathrm{S})$ a potom primjeni zakonitosti koja povezuje vrijednosti entropije proširenoga i neproširenog izvora.

Na osnovu zadanih vjerojatnosti $P(s_1, s_1)$, $P(s_2, s_2)$ i $P(s_3, s_3)$, lako se nađe:

$$P(s_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(s_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(s_3) = \frac{1}{4}$$

Entropija neproširenog izvora tada je:

$$\begin{aligned} H(\mathrm{S}) &= P(s_1) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_1)} + P(s_2) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_2)} + P(s_3) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_3)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ld}\,2 + \frac{1}{4} \cdot \mathrm{ld}\,4 + \frac{1}{4} \cdot \mathrm{ld}\,4 = 1{,}5\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}} \end{aligned}$$

Koristeći se zakonitošću:

$$H(\mathrm{S}^n) = n \cdot\ H(\mathrm{S})$$

dobiva se:

$$H(\mathrm{S}^2) = 2 \cdot\ H(\mathrm{S}) = 2 \cdot 1{,}5 = 3\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Zadatak 2.4.

Diskretni izvor bez memorije emitira dva simbola s apriornim vjerojatnostima $P(s_1) = \frac{7}{8}$ i $P(s_2) = \frac{1}{8}$. Odredite entropiju izvora i prosječnu duljinu kodne riječi. Kolika je efikasnost koda?

Rješenje:

Entropija izvora računa se na sljedeći način:

$$H(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{n} P(s_i) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_i)}$$

$$H(\mathrm{S}) = P(s_1) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_1)} + P(s_2) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_2)} = \frac{7}{8} \cdot \mathrm{ld}\frac{8}{7} + \frac{1}{7} \cdot \mathrm{ld}\,8 = 0{,}544\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Za kodiranje dvaju simbola ravnomjernim kodom dovoljno je da duljine kodnih riječi budu 1 bit. Simbolu s_1 pridružuje se kodna riječ 0, a simbolu s_2 kodna riječ 1.

Tada je prosječna duljina kodne riječi:

$$L = \sum_{i=1}^{n} P(s_i) \cdot l_i = P(s_1) \cdot l_1 + P(s_2) \cdot l_2 = \frac{7}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 = 1 \frac{\text{bit}}{\text{simb}}$$

Efikasnost koda onda iznosi:

$$\eta = \frac{H(\mathrm{S})}{L} \cdot 100\ \% = 54{,}4\ \%$$

Zadatak 2.5.

Diskretni izvor emitira simbole 0 i 1 s apriornim vjerojatnostima međusobno jednakim. Kolika je entropija izvora, a kolika efikasnost koda ako su emitirane kodne riječi 00, 01, 10, 11?

Rješenje:

Apriorne vjerojatnosti zadanih simbola (budući da su međusobno jednake) iznosit će:

$$P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$$

Entropija neproširenog izvora $H(\mathrm{S})$ bit će:

$$H(\mathrm{S}) = \sum_{i=1}^{n} P(s_i) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(s_i)}$$

$$H(\mathrm{S}) = P(0) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(0)} + P(1) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(1)} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ld}\, 2 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ld}\, 2 = 1\ \frac{\text{Sh}}{\text{simb}}$$

Entropija drugog proširenja datog izvora bit će:

$$H(\mathrm{S}^2) = 2 \cdot\ H(\mathrm{S}) = 2 \cdot 1 = 2\ \frac{\text{Sh}}{\text{simb}}$$

Apriorne vjerojatnosti simbola drugog proširenja izvora jednake su umnošcima apriornih vjerojatnosti odgovarajućih simbola prvobitnog izvora.

$$P(s_1) = P(0) \cdot P(0) = \frac{1}{4}$$

$$P(s_2) = P(0) \cdot P(1) = \frac{1}{4}$$

$$P(s_3) = P(1) \cdot P(0) = \frac{1}{4}$$

$$P(s_4) = P(1) \cdot P(1) = \frac{1}{4}$$

Prosječna duljina kodne riječi računa se kao:

$$L=\sum_{i=1}^{n}P(s_i)\cdot l_i=P(s_1)\cdot l_1+P(s_2)\cdot l_2+P(s_3)\cdot l_3+P(s_4)\cdot l_4$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2=2\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{simb}}$$

i jednaka je, naravno, pojedinačnim duljinama kodnih riječi jer se radi o ravnomjernom kodu.

Sukladno tome, efikasnost iznosi:

$$\eta=\frac{H(\mathrm{S}^2)}{L}\cdot 100\ \%=100\ \%$$

Zadatak 2.6.

Za slučaj iz prethodnog zadatka izračunajte entropiju izvora i efikasnost koda ako zajedničke vjerojatnosti pojave simbola iznose redom: $P(s_1)=\frac{1}{2}$, $P(s_2)=\frac{1}{4}$, $P(s_3)=\frac{1}{8}$, $P(s_4)=\frac{1}{8}$.

Rješenje:

Entropija danog izvora $H(\mathrm{S})$ iznosi:

$$H(\mathrm{S})=\sum_{i=1}^{n}P(s_i)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_i)}$$

$$H(\mathrm{S})=P(s_1)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_1)}+P(s_2)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_2)}+P(s_3)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_3)}+P(s_4)\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(s_4)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{ld}\,2+\frac{1}{4}\cdot \mathrm{ld}\,4+\frac{1}{8}\cdot \mathrm{ld}\,8+\frac{1}{8}\cdot \mathrm{ld}\,8=1{,}75\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Prosječna duljina kodne riječi računa se kao:

$$L=\sum_{i=1}^{n}P(s_i)\cdot l_i=P(s_1)\cdot l_1+P(s_2)\cdot l_2+P(s_3)\cdot l_3+P(s_4)\cdot l_4$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 2=2\,\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{simb}}$$

i jednaka je, naravno, pojedinačnim duljinama kodnih riječi jer se radi o ravnomjernom kodu.

Sukladno tome, efikasnost iznosi:

$$\eta=\frac{H(\mathrm{S})}{L}\cdot 100\ \%=87{,}5\ \%$$

3.

STATISTIČKO KODIRANJE

Ravnomjerni kod

Ravnomjernim kodom koristi se u sustavima gdje nije toliko važno primjenjivati statističko kodiranje (sustavi koji podnose veću suvišnost). U ovakvoj vrsti kodiranja, sve kodne riječi su jednake duljine. Ako imamo q mogućih poruka koje generira izvor, tada je duljina kodnih riječi jednaka $n = \log_r q$ (r je osnova koda – broj simbola pri kodiranju). Za slučaj binarnog koda to znači da je $n = \text{ld}\, q$. (primjer: ako izvor generira 8 različitih poruka, tada je za binarni kod potrebno da svaka kodna riječ bude duljine 3 bita - $3 = \text{ld}\, 8$ to jest $2^3 = 8$).

Optimalni kod

Osnovni princip dobivanja optimalnog koda: poruke koje se češće pojavljuju (odnosno koje imaju veću vjerojatnost) kodiraju se kraćim kodnim riječima, a manje vjerojatne poruke duljim kodnim riječima.

Osnovne osobine optimalnog kôda:

- ako su elementarne poruke numerirane tako da odgovarajuće vjerojatnosti ne rastu, $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq p_N$, tada odgovarajuće duljine kodnih riječi ne opadaju, $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \ldots \leq l_N$.
- postoje dvije kodne riječi maksimalne duljine (l_N), takve da se one razlikuju samo posljednjim simbolima, a svi prethodni su im jednaki.

Zadatci za vježbu

Zadatak 3.1.

Izvor generira 10 vrsta poruka, koje potom predaje kanalu. Tablica prikazuje prosječan broj pojedinih generiranih poruka u jednom satu. Potrebno je kodirati zadane poruke binarnim kodom, koji će osigurati najekonomičniji prijenos poruka.

u_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	20	30	40	30	70	60	90	100	10	50

$$\sum_{i=1}^{10} f_i = 500$$

Uputa:

Metoda kodiranja koja osigurava najekonomičniji prijenos je metoda *Shannon-Fanot*. Prema ovoj metodi kodiranje se vrši u sljedećim koracima:

1. Sve se poruke poredaju u opadajući niz vjerojatnosti;
2. Poruke se podijele u dvije grupe tako da su im sume vjerojatnosti po grupama približno jednake (na optimalan način);
3. Prvoj grupi dodijeli se 0, a drugoj grupi 1;
4. Ponavljaju se koraci navedeni od 1 do 3 dok se za svaku poruku ne formira kodna riječ, to jest dok u svakoj grupi ne ostane samo jedan simbol.

Rješenje:

Da bismo proveli kodiranje zadanih poruka, potrebno je odrediti pojedinačne apriorne vjerojatnosti za svaku od poruka uz pomoć izraza:

$$P(u_i) = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{10} f_i}$$

Praćenjem upute dane u zadatku, dobiva se sljedeća tablica:

u_i	p_i	Kodna riječ					l_i
8	0,2	0	0				2
7	0,18	0	1	0			3
5	0,14	0	1	1			3
6	0,12	1	0	0			3
10	0,10	1	0	1			3
3	0,08	1	1	0	0		4
2	0,06	1	1	0	1		4
4	0,06	1	1	1	0		4
1	0,04	1	1	1	1	0	5
9	0,02	1	1	1	1	1	5

Primjenom ove metode kodiranja, poruke s većom vjerojatnosti pojavljivanja bit će kodirane kraćim kodnim riječima, što omogućava najekonomičniji prijenos. Također, dekoder će moći jednoznačno dekodirati svaku od kodnih riječi jer ni jedna kodna riječ u ovom skupu nije sadržana u početnom dijelu neke druge kodne riječi.

Zadatak 3.2.

Poruke A, B, C i D s vjerojatnostima pojavljivanja:

$$P(A) = 0{,}11$$
$$P(B) = 0{,}27$$
$$P(C) = 0{,}48$$
$$P(D) = 0{,}14$$

dolaze na ulaz kodera. Na izlazu iz kodera pojavljuje se sekvenca „**0100111110100111111000**", koja predstavlja niz poruka kodiranih *Shannon – Fanotovom* metodom. Potrebno je odrediti redoslijed originalnih poruka u sekvenci na izlazu kodera.

Rješenje:

Primjenom *Shannon – Fanotove* metode za kodiranje zadanih poruka dobiva se sljedeća tablica:

S_i	$P(S_i)$	Kodna riječ			l_i
C	0,48	0			1
B	0,27	1	0		2
D	0,14	1	1	0	3
A	0,11	1	1	1	3

Dekodirana sekvenca **0100111110100111111000** izgleda ovako: **CBCADBCADCC.**

Zadatak 3.3.

Izvor informacija opisan je na sljedeći način:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Ne postoji statistička veza između elemenata. Treba odrediti koeficijent efikasnosti kodova ako se izvodi kodiranje:

a) ravnomjernim binarnim kodom;
b) *Shannon – Fanotovim* optimalnim binarnim kodom.

Rješenje:

Entropija izvora ovisi samo o zadanim apriornim vjerojatnostima poruka koje se šalju i ona iznosi:

$$H(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(x_i)} = 1{,}156 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

a) Kad se koristi ravnomjernim binarnim kodom, duljine kodnih riječi međusobno su jednake.

x_i	p_i	Kodna riječ	l_i
x_1	0,2	00	2
x_2	0,7	01	2
x_3	0,1	10	2

Prosječna duljina kodne riječi bit će:

$$L = 2 \frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{simb}}$$

a efikasnost:

$$\eta = \frac{H(\mathrm{X})}{L} \cdot 100\ \% = 57{,}8\ \%$$

b) Primjenom optimalnog koda pomoću *Shannon – Fanotove* metode, dobiva se:

x_i	p_i	Kodna riječ	l_i
x_2	0,7	0	1
x_1	0,2	10	2
x_3	0,1	11	2

Prosječna duljina kodne riječi će u ovom slučaju biti kraća:

$$L = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot l_i = 1{,}3 \frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{simb}}$$

pa će efikasnost biti veća:

$$\eta = \frac{H(\mathrm{X})}{L} \cdot 100\ \% = 88{,}92\ \%$$

Zadatak 3.4.

Lista simbola nekog izvora informacija sastoji se od 7 simbola: A, B, C, D, E, F, G;

Vjerojatnosti tih simbola na izlazu izvora dane su tablicom:

x_i	A	B	C	D	E	F	G
$p(x_i)$	0,5	0,25	0,08	0,05	0,05	0,04	0,03

Izvor emitira simbole brzinom $v = 10\frac{simb}{s}$. Potrebno je odrediti informacijski tok prijenosnog sustava. Kolik je stupanj korisnosti takva sustava ako se kodira svaki simbol istim brojem bita? Kolik je stupanj korisnosti sustava ako se primjenjuje *Shannon – Fanotova* metoda?

Rješenje:

Entropija izvora ovisi samo o zadanim apriornim vjerojatnostima simbola koji se šalju, i ona iznosi:

$$H(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(x_i)} = 2{,}0612\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Informacijski tok prijenosnog sustava računa se na sljedeći način:

$$\Phi(\mathrm{X}) = v \cdot H(\mathrm{X}) = 20{,}612\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{s}}$$

a) Kad se koristi ravnomjernim binarnim kodom, duljine kodnih riječi međusobno su jednake.

x_i	p_i	Kodna riječ	l_i
A	0,5	000	3
B	0,25	001	3
C	0,08	010	3
D	0,05	011	3
E	0,05	100	3
F	0,04	101	3
G	0,03	110	3

Prosječna duljina kodne riječi bit će:

$$L = 3\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{simb}}$$

a efikasnost:

$$\eta = \frac{H(\mathrm{X})}{L} \cdot 100\ \% = 68{,}7\ \%$$

b) Primjenom optimalnog koda pomoću *Shannon – Fanot*-ove metode, dobiva se:

x_i	$P(x_i)$	Kodna riječ					l_i
A	0,5	0					1
B	0,25	1	0				2
C	0,08	1	1	0	0		4
D	0,05	1	1	0	1		4
E	0,05	1	1	1	0		4
F	0,04	1	1	1	1	0	5
G	0,03	1	1	1	1	1	5

Prosječna duljina kodne riječi će u ovom slučaju biti kraća:

$$L = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot l_i = 2{,}07 \frac{\text{bit}}{\text{simb}}$$

pa će efikasnost biti veća:

$$\eta = \frac{H(\mathrm{X})}{L} \cdot 100\% = 99{,}6\ \%$$

Zadatak 3.5.

Dane su poruke s pripadajućim vjerojatnostima. Odredite *Huffmanov* kod koristeći 3 simbola: 0,1,2. Poruke su od x_1 do x_6.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_6	x_5
p_i	0,25	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05

Uputa:

1. Poruke izvora rasporedite u opadajući niz po vjerojatnostima;
2. Provedite grupiranje q_0 posljednih elemenata. Vjerojatnosti ovih elemenata se zbrajaju i iz njih se dobiva nova vrijednost vjerojatnosti. Formira se nova grupa vjerojatnosti koje se ponovno razvrstavaju u opadajući niz;
3. U novoj grupi se grupira r posljednih elemenata, koji formiraju novu vrijednost vjerojatnosti jednaku njihovu zbroju. Lista vjerojatnosti razvrsta se u opadajući niz;
4. Iteracija se ponavlja sve dok se u posljednoj ne dođe do r vjerojatnosti. Zatim se provede pridruživanje simbola koda unatrag od posljednje iteracije prema prvoj;

Uvjet uz pomoć kojeg se određuje q_0 je: $\frac{q-q_0}{r-1} \in Z$,

q – broj simbola ili poruka izvora;

r – broj simbola koda;

Za q_0 vrijedi: $2 \leq q_0 \leq r$

Rješenje:

Entropija izvora računa se na sljedeći način:

$$H(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(x_i)} = 2{,}39 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Budući da kod rabi 3 simbola, mora vrijediti:

$$2 \leq q_0 \leq 3$$

i:

$$\frac{6 - q_0}{2} \in \mathbb{Z}$$

Jedini prirodni broj koji zadovoljava ove uvjete je $q_0 = 2$.

Primjenom dane upute dobiva se:

x_i	p_i	Kodne riječi					l_i
x_1	0,25	1	0,25	1	0,5	0	1
x_2	0,25	2	0,25	2	0,25	1	1
x_3	0,20	00	0,20	00	0,25	2	2
x_4	0,15	01	0,15	01			2
x_5	0,10	020	0,15	02			3
x_6	0,05	021					3

Prosječna je duljina kodne riječi:

$$L = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot l_i = 1{,}65 \frac{\text{znak}}{\text{simb}}$$

Efikasnost će se u ovom slučaju računati prema sljedećem izrazu:

$$\eta = \frac{H(\mathrm{X})}{L \cdot \mathrm{ld}\, r} \cdot 100\ \% = 91{,}4\ \%$$

Zadatak 3.6.

U tablici je dana lista simbola s pripadajućim vjerojatnostima. Odredite entropiju izvora, te potom odrediti kodne riječi *Huffmanovom* metodom sa simbolima 0 i 1. Kolika je efikasnost?

s_i	p_i
s_1	0,28
s_2	0,18
s_3	0,15
s_4	0,13
s_5	0,10
s_6	0,07
s_7	0,05
s_8	0,04

Rješenje:

Entropija izvora računa se na sljedeći način:

$$H(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(x_i)} = 2{,}72 \frac{\mathrm{Sh}}{\text{simb}}$$

Budući da se koristi binarnim kodom vrijedi da je $q_0 = 2$.

Primjenom *Huffmannove* metode kodiranja, dobiva se:

s_i	p_i	Kodne riječi													l_i
s_1	0,28	01	0,28	01	0,28	01	0,28	01	0,31	00	0,41	1	0,59	0	2
s_2	0,18	11	0,18	11	0,18	11	0,23	10	0,28	01	0,31	00	0,41	1	2
s_3	0,15	001	0,15	001	0,16	000	0,18	11	0,23	10	0,28	01			3
s_4	0,13	100	0,13	100	0,15	001	0,16	000	0,18	11					3
s_5	0,10	101	0,10	101	0,13	100	0,15	001							3
s_6	0,07	0001	0,09	0000	0,10	101									4
s_7	0,05	00000	0,07	0001											5
s_8	0,04	00001													5

Prosječna duljina kodne riječi iznosi:

$$L = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot l_i = 2{,}79 \frac{\text{bit}}{\text{simb}}$$

dok je efikasnost:

$$\eta = \frac{H(\text{X})}{L \cdot \text{ld}\, r} \cdot 100\ \% = 97{,}5\ \%$$

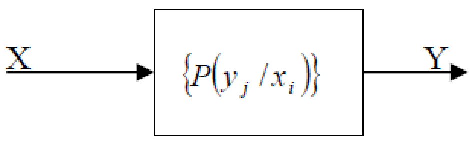
4.

KANAL

Informacijski kanal moguće je definirati kao sredstvo za transport informacija između dvije točke u mreži, a može se promatrati na različitim slojevima OSI ISO modela mreže. Sam prijenosni medij također je informacijski kanal. Takav se informacijski kanal obično naziva samo kanalom. Jedan od osnovnih parametara kanala je njegova širina prijenosnog pojasa (*bandwidth*) koja se mjeri jedinicom herc (Hz). Prijenosni (propusni) pojas je onaj dio frekvencijskog područja unutar kojeg kanal propušta frekvencijske komponente sa svog ulaza na izlaz s prigušenjem koje je manje od neke definirane vrijednosti. Prijenosni se pojas određuje s obzirom na prijenosnu funkciju kanala.

Diskretni kanal bez memorije

Neka neki diskretni kanal bude definiran listom ulaznih simbola $X = \{x_i\}; \quad i = 1, \dots, r$, listom izlaznih simbola $Y = \{y_j\}; \quad j = 1, \dots, s$ (skupovi i jednih i drugih simbola su konačni ili barem prebrojivi) i skupom odgovarajućih uvjetnih vjerojatnosti $\{P(y_j|x_i)\}$; $i = 1, \dots, r; \ j = 1, \dots, s$ pojavljivanja izlaznih simbola (y_j) nakon emitiranog jednoga (bilo kojeg) ulaznog simbola (x_i).



Slika 4.1. Diskretni kanal bez memorije

Ako su sve ove uvjetne vjerojatnosti neovisne o prethodno emitiranim simbolima u kanal (ili onih koji će biti emitirani), kažemo da je kanal bez memorije.

Kanalna matrica može se definirati kao:

$$P = \left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} P_{11} & P_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{1s} \\ P_{21} & P_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{2s} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ P_{r1} & P_{r2} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{rs} \end{matrix} \right\|$$

gdje indeks i pokazuje redni broj vrste (tj. ulaznog simbola), a indeks j redni broj stupca (izlaznog simbola).

Ovdje svakako mora vrijediti:

$$\sum_{j=1}^{s} P_{ij} = 1, \qquad (j = 1, \dots, s)$$

jer odlučivač na prijamu mora donijeti neku odluku (tj. koji je simbol primljen nakon što je neki emitiran).

Najjednostavniji od svih je binarni kanal kojemu je matrica:

$$P_{BC} = \left\| \begin{matrix} v_1 & p_1 \\ p_2 & v_2 \end{matrix} \right\| .$$

Naravno, mora vrijediti:

$$p_1 + v_1 = 1$$
$$p_2 + v_2 = 1$$

Poseban oblik binarnog kanala je binarni simetrični kanal, s matricom:

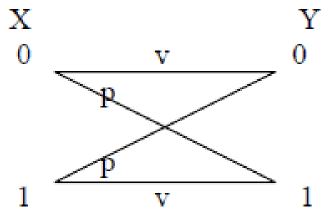
$$P_{BSC} = \left\| \begin{matrix} v & p \\ p & v \end{matrix} \right\| .$$

gdje vrijedi

$$p + v = 1$$

koji je simetričan u smislu zamjene vjerojatnosti jednoga simbola drugim (0 s 1, ili 1 s 0).

Umjesto kanalnom matricom, kanal se može predočiti i grafom (binarni simetrični):



Slika 4.2. Graf binarnog simetričnog kanala

Odnosi vjerojatnosti u kanalu

Neka je P kanalna matrica za zadani kanal, koja se često u literaturi još zove i matrica transvjerojatnosti.

Neka su, također, dane ulazne vjerojatnosti simbola $P(x_i)\ i = 1, \dots, r.$ pa su tada izlazne vjerojatnosti:

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{r} P(x_i) P_{ij} \quad ; \quad j = 1, \dots, s$$

Dakle, na osnovi ulaznih i prijelaznih vjerojatnosti mogu se naći izlazne vjerojatnosti. U općem slučaju nije moguće i obratno, dakle na osnovi izlaznih i prijelaznih vjerojatnosti izračunati ulazne vjerojatnosti.

Prosječna uzajamna količina informacije

Kako bismo u sljedećem poglavlju definirali pojam kapaciteta diskretnog kanala, moramo se prvo upoznati s pojmom uzajamne količine informacija. Već smo definirali pojam količine informacije (u poglavlju koje se odnosilo na informacijski izvor).

U komunikacijskim sustavima nisu nam zanimljivi pojedini simboli (količine informacije), već svojstva sustava u cjelini. To se postiže uvođenjem prosječnih količina informacija s obzirom na cijeli skup događaja. Sada količinu informacije, s pripadajućim vjerojatnostima, čine statistički skup X. Veličina $I(X;Y)$ predstavlja prosječnu količinu informacija koju donosi primljeni simbol y_j a koji se odnosi na skup svih predanih simbola X i računa se kao:

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld} \frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)}$$

pri čemu je:

$$I(x_i, y_j) = \mathrm{ld} \frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)}$$

uzajamna količina informacija pojedinačnih parova simbola (poslanih i primljenih).

Veličina $I(X)$ označava prosječnu vlastitu količinu informacije. Ona je onaj iznos informacija koji je u prosjeku potreban da bi se odredio bilo koji pojedinačni simbol iz skupa X mogućih simbola koji se prenose nekim sustavom. Uobičajeno je pisati za $I(X)$ i $H(X)$ (entropija na izvoru – entropija diskretne slučajne varijable X).

Izrazi za odnose između potpune, uzajamne količine informacija i entropije izvora su sljedeći:

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X;Y)$$
$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y)$$
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Kapacitet kanala

Kapacitet kanala računa se prema izrazu

$$C = B\,\mathrm{ld}\left(1 + \frac{P}{N}\right) = B\,\mathrm{ld}(1 + SNR)$$

Ovaj izraz pokazuje da se kapacitet jednog kanala može povećati bilo povećanjem odnosa snaga signal/šum (tj. povećanjem snage predajnika, ili smanjenjem snage šuma), ili povećanjem korištenog opsega frekvencija. Također, vidimo da se održavanje istog kapaciteta može postići uz razmjenu između opsega frekvencija i odnosa snaga signal/šum.

Zadatci za vježbu

Zadatak 4.1.

Dane su apriorne vjerojatnosti pojave simbola x_1, x_2, x_3 na ulazu nekoga komunikacijskog sustava. Vjerojatnosti ispravnog prijelaza ulaznog simbola x_i u izlazni simbol y_i su $p = \frac{1}{2}$, a vjerojatnosti neispravnog prijelaza međusobno su jednake. Nađite:

a) Zajedničke vjerojatnosti $p(x_i, y_j)$

b) Uvjetne vjerojatnosti $p\left(x_i \middle| y_j\right)$

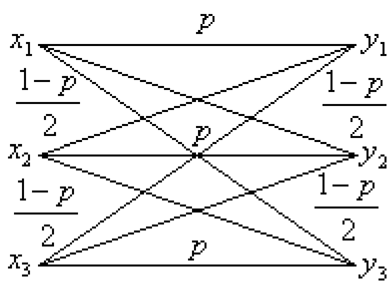
c) Uzajamnu količinu informacije $I(x_i, y_j)$

d) Vlastitu količinu informacije na izvoru $Q(x_i)$

Apriorne vjerojatnosti: $p(x_1) = \frac{1}{2}$, $p(x_2) = \frac{1}{4}$, $p(x_3) = \frac{1}{4}$

Rješenje:

Graf zadanog diskretnog komunikacijskog kanala prikazan je na sl.4.3.:



Slika 4.3. Graf zadanog diskretnog komunikacijskog kanala

pri čemu su uvjetne vjerojatnosti:

$$p(y_j|x_i) = \begin{cases} p = \dfrac{1}{2}; & i = j \\ \dfrac{1-p}{2} = \dfrac{1}{4}; & i \neq j \end{cases}$$

a) Zajedničke vjerojatnosti računaju se prema izrazu:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i)$$

Pojedine zajedničke vjerojatnosti tada iznose:

$p(x_1, y_1) = \frac{1}{4}$ $p(x_2, y_1) = \frac{1}{16}$ $p(x_3, y_1) = \frac{1}{16}$

$p(x_1, y_2) = \frac{1}{8}$ $p(x_2, y_2) = \frac{1}{8}$ $p(x_3, y_2) = \frac{1}{16}$

$p(x_1, y_3) = \frac{1}{8}$ $p(x_2, y_3) = \frac{1}{16}$ $p(x_3, y_3) = \frac{1}{8}$

b) Aposteriorne uvjetne vjerojatnosti $p(x_i|y_j)$ računaju se prema izrazu:

$$p(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

Apriorne vjerojatnosti za događaje y_j nisu zadane pa ih računamo prema sljedećem izrazu:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j)$$

to jest:

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_j) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) + p(x_3, y_1) = \frac{3}{8}$$

$$p(y_2) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_j) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) + p(x_3, y_2) = \frac{5}{16}$$

$$p(y_3) = \sum_{i=1}^{3} p(x_i, y_j) = p(x_1, y_3) + p(x_2, y_3) + p(x_3, y_3) = \frac{5}{16}$$

Provjera uvjeta normiranja:

$$p(y_1) + p(y_2) + p(y_3) = \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{5}{16} = 1$$

Aposteriorne vjerojatnosti su sada:

$p(x_1|y_1) = \frac{2}{3}$ $p(x_2|y_1) = \frac{1}{6}$ $p(x_3|y_1) = \frac{1}{6}$

$p(x_1|y_2) = \frac{2}{5}$ $p(x_2|y_2) = \frac{2}{5}$ $p(x_3|y_2) = \frac{1}{5}$

$p(x_1|y_3) = \frac{2}{5}$ $p(x_2|y_3) = \frac{1}{5}$ $p(x_3|y_3) = \frac{2}{5}$

c) Uzajamni sadržaj informacije $I(x_i, y_j)$ računa se prema izrazu:

$$I(x_i, y_j) = \mathrm{ld}\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}$$

pa se dobivaju sljedeće vrijednosti:

$$I(x_1, y_1) = \mathrm{ld}\frac{p(x_1|y_1)}{p(x_1)} = \mathrm{ld}\frac{4}{3} = 0{,}415\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_1, y_2) = \mathrm{ld}\frac{p(x_1|y_2)}{p(x_1)} = \mathrm{ld}\frac{4}{5} = -0{,}322\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_1, y_3) = \mathrm{ld}\frac{p(x_1|y_3)}{p(x_1)} = \mathrm{ld}\frac{4}{5} = -0{,}322\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_2, y_1) = \mathrm{ld}\frac{p(x_2|y_1)}{p(x_2)} = \mathrm{ld}\frac{4}{6} = -0{,}585\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_2, y_2) = \mathrm{ld}\frac{p(x_2|y_2)}{p(x_2)} = \mathrm{ld}\frac{8}{5} = 0{,}678\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_2, y_3) = \mathrm{ld}\frac{p(x_2|y_3)}{p(x_2)} = \mathrm{ld}\frac{4}{5} = -0{,}322\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_3, y_1) = \mathrm{ld}\frac{p(x_3|y_1)}{p(x_3)} = \mathrm{ld}\frac{4}{6} = -0{,}585\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_3, y_2) = \mathrm{ld}\frac{p(x_3|y_2)}{p(x_3)} = \mathrm{ld}\frac{4}{5} = -0{,}322\ \mathrm{Sh}$$

$$I(x_3, y_3) = \mathrm{ld}\frac{p(x_3|y_3)}{p(x_3)} = \mathrm{ld}\frac{8}{5} = 0{,}678\ \mathrm{Sh}$$

d) Vlastiti sadržaj informacije $Q(x_i)$ računa se na sljedeći način:

$$Q(x_i) = \mathrm{ld}\frac{1}{p(x_i)}$$

pa se dobiva:

$$Q(x_1) = \mathrm{ld}\frac{1}{p(x_1)} = \mathrm{ld}2 = 1\mathrm{Sh}$$

$$Q(x_2) = \mathrm{ld}\frac{1}{p(x_2)} = \mathrm{ld}4 = 2\mathrm{Sh}$$

$$Q(x_3) = \mathrm{ld}\frac{1}{p(x_3)} = \mathrm{ld}4 = 2\mathrm{Sh}$$

Zadatak 4.2.

Izračunajte prosječnu uzajamnu količinu informacije za skupove X i Y kojima je statistička veza izražena zajedničkim vjerojatnostima $P(x_i, y_j)$ prikazanima tablicom:

$P(x_i, y_j)$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,2	0,3
y_2	0,25	0	0,15

Rješenje:

Prosječna uzajamna količina informacije može se izračunati primjenom jednog od dvaju izraza ispod:

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \cdot I(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld}\frac{P(x_i|y_j)}{P(x_i)}$$

i

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

pri čemu vrijedi:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(x_i)}$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{m} P(y_j) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{P(y_j)}$$

$$H(X|Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld}\ \frac{1}{P(x_i|y_j)}$$

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld}\ \frac{1}{P(x_i, y_j)}$$

Ovdje će se koristiti drugim načinom za rješavanje zadatka.

Prvo je potrebno odrediti apriorne vjerojatnosti slanja simbola kako slijedi:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^{2} P(x_i, y_j)$$

$$P(x_1) = \sum_{j=1}^{2} P(x_1, y_j) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) = 0.1 + 0.25 = 0.35$$

$$P(x_2) = \sum_{j=1}^{2} P(x_2, y_j) = P(x_2, y_1) + P(x_2, y_2) = 0.2 + 0 = 0.2$$

$$P(x_3) = \sum_{j=1}^{2} P(x_3, y_j) = P(x_3, y_1) + P(x_3, y_2) = 0.3 + 0.15 = 0.45$$

Analogno se računaju i apriorne vjerojatnosti primljenih simbola $P(y_j)$:

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^{3} P(x_i, y_j)$$

$$P(y_1) = \sum_{i=1}^{3} P(x_i, y_1) = P(x_1, y_1) + P(x_2, y_1) + P(x_3, y_1) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6$$

$$P(y_2) = \sum_{i=1}^{3} P(x_i, y_2) = P(x_1, y_2) + P(x_2, y_2) + P(x_3, y_2) = 0.25 + 0 + 0.15 = 0.4$$

Entropija izvora računa se kao:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{3} P(x_i) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(x_i)} = -\sum_{i=1}^{3} P(x_i) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_i)$$

$$\begin{aligned} H(X) &= -P(x_1) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_1) - P(x_2) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_2) - P(x_3) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_3) \\ &= 0{,}53 + 0{,}464 + 0{,}518 = 1{,}512 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}} \end{aligned}$$

Entropija na odredištu računa se kao:

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{2} P(y_j) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(y_j)} = -\sum_{j=1}^{2} P(y_j) \cdot \mathrm{ld}\, P(y_j)$$

$$H(Y) = -P(y_1) \cdot \mathrm{ld}\, P(y_1) - P(y_2) \cdot \mathrm{ld}\, P(y_2) = 0{,}442 + 0{,}529 = 0{,}971 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Zajednička entropija računa se kao:

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} P(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned} H(X, Y) = &-P(x_1, y_1) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_1, y_1) - P(x_1, y_2) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_1, y_2) - P(x_2, y_1) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_2, y_1) \\ &- P(x_2, y_2) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_2, y_2) - P(x_3, y_1) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_3, y_1) - P(x_3, y_2) \cdot \mathrm{ld}\, P(x_3, y_2) \\ &= 0{,}332 + 0{,}5 + 0{,}464 + 0{,}521 + 0{,}411 = 2{,}228 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}} \end{aligned}$$

Konačno, vrijednost prosječne uzajamne količine informacija dobiva se kao:

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = 1{,}512 + 0{,}971 - 2{,}228 = 0{,}255 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Zadatak 4.3.

Vjerojatnosti pojave diskretnih simbola na izvoru informacije su:

$$P(x_1) = \frac{1}{2}, P(x_2) = \frac{1}{4}, P(x_3) = \frac{1}{8}, \text{ i } P(x_4) = \frac{1}{8}.$$

Statističke veze između pojedina dva simbola prikazane su sljedećom tablicom:

x_i, x_j	$P(x_i, x_j)$	$P(x_j \mid x_i)$	x_i, x_j	$P(x_i, x_j)$	$P(x_j \mid x_i)$
$x_1\, x_1$	13/32	13/16	$x_3\, x_1$	0	0
$x_1\, x_2$	3/32	3/16	$x_3\, x_2$	0	0
$x_1\, x_3$	0	0	$x_3\, x_3$	1/8	1
$x_1\, x_4$	0	0	$x_3\, x_4$	0	0
$x_2\, x_1$	1/32	1/8	$x_4\, x_1$	1/16	1/2
$x_2\, x_2$	1/8	1/2	$x_4\, x_2$	1/32	1/4
$x_2\, x_3$	0	0	$x_4\, x_3$	1/32	1/4
$x_2\, x_4$	3/32	3/8	$x_4\, x_4$	0	0

Izračunajte entropiju izvora:

a) Bez statističke ovisnosti
b) Uz statističku ovisnost među simbolima.

Rješenje:

a) Entropija izvora bez memorije računa se kao:

$$H(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(x_i)} = 1{,}75 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

b) Kad postoji statistička ovisnost među simbolima, entropija izvora računat će se kao:

$$H_Z(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P(x_i, x_j) \cdot \mathrm{ld} \frac{1}{P(x_j \mid x_i)}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti, dobiva se:

$$H_Z(\mathrm{X}) = 0{,}87 \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

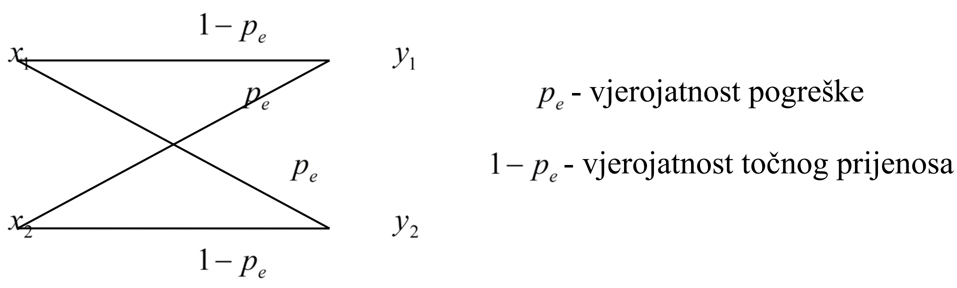
Budući da je entropija mjera kaosa i nereda nekog sustava, ovo je zapravo očekivan rezultat. Dakle, entropija izvora koji nije bez memorije bit će manja od entropije izvora gdje ne postoji statistička ovisnost među simbolima.

Zadatak 4.4.

Odredite kapacitet binarnog simetričnog kanala.

Rješenje:

Graf diskretnog binarnog kanala prikazan je na slici ispod.



Slika 4.4. Graf binarnog kanala

Apriorne i uvjetne vjerojatnosti označit ćemo kao:

$$p(x_1) = a$$
$$p(x_2) = 1 - a = \bar{a}$$
$$p(y_1|x_1) = 1 - p_e = \overline{p_e}$$
$$p(y_1|x_2) = p_e$$
$$p(y_2|x_2) = 1 - p_e = \overline{p_e}$$
$$p(y_2|x_1) = p_e$$

Zajedničke vjerojatnosti jednake su onda:

$$p(x_1, y_1) = p(x_1) \cdot p(y_1|x_1) = a \cdot \overline{p_e}$$
$$p(x_1, y_2) = p(x_1) \cdot p(y_2|x_1) = a \cdot p_e$$
$$p(x_2, y_1) = p(x_2) \cdot p(y_1|x_2) = \bar{a} \cdot p_e$$
$$p(x_2, y_2) = p(x_2) \cdot p(y_2|x_2) = \bar{a} \cdot \overline{p_e}$$

A vjerojatnosi događaja y_i dobivaju se kao:

$$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = a \cdot \overline{p_e} + \bar{a} \cdot p_e$$
$$p(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = a \cdot p_e + \bar{a} \cdot \overline{p_e}$$

Kapacitet je kanala maksimalna vrijednost prosječne uzajamne količine informacija.

$$C = \max I(X, Y)$$

Prosječna uzajamna količina informacija računa se kao:

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \cdot I(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld}\frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld}\frac{p(y_j|x_i)}{p(y_j)}$$

$$I(X,Y) = a \cdot \overline{p_e} \cdot \mathrm{ld}\frac{\overline{p_e}}{a \cdot \overline{p_e} + \bar{a} \cdot p_e} + a \cdot p_e \cdot \mathrm{ld}\frac{p_e}{a \cdot p_e + \bar{a} \cdot \overline{p_e}} +$$

$$+\bar{a} \cdot p_e \cdot \mathrm{ld}\frac{p_e}{a \cdot \overline{p_e} + \bar{a} \cdot p_e} + \bar{a} \cdot \overline{p_e} \cdot \mathrm{ld}\frac{\overline{p_e}}{a \cdot p_e + \bar{a} \cdot \overline{p_e}}$$

$$I(X,Y) = (a \cdot p_e + \bar{a} \cdot \overline{p_e}) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{a \cdot \overline{p_e} + \bar{a} \cdot p_e} + (a \cdot \overline{p_e} + \bar{a} \cdot p_e) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{a \cdot \overline{p_e} + \bar{a} \cdot p_e} -$$

$$-\left(p_e \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p_e} + \overline{p_e} \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\overline{p_e}}\right)$$

Uvedimo sljedeće oznake:

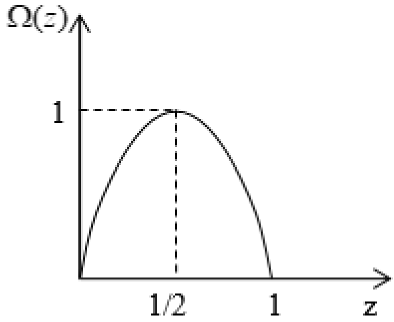
$$z = a \cdot p_e + \bar{a} \cdot \overline{p_e}$$

$$\bar{z} = 1 - z = 1 - a \cdot p_e + \bar{a} \cdot \overline{p_e} = a + \bar{a} - a \cdot p_e + \bar{a} \cdot (1 - p_e) = a \cdot \overline{p_e} + \bar{a} \cdot p_e$$

$$I(X,Y) = \left(z \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{z} + \bar{z} \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\bar{z}}\right) - \left(p_e \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p_e} + \overline{p_e} \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\overline{p_e}}\right)$$

Definirajmo sad funkciju $\Omega(z)$ kao:

$$\Omega(z) = z \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{z} + \bar{z} \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{\bar{z}}$$



Graf funkcije $\Omega(z)$ prikazan je na slici 4.5.

Slika 4.5. Graf funkcije $\Omega(z)$

Budući da je sada

$$I(X,Y) = \Omega(z) - \Omega(p_e)$$

a kapacitet predstavlja maksimalnu vrijednost prethodnog izraza, dobivamo da je

$$C = \max I(X,Y) = \max(\Omega(z) - \Omega(p_e)) = 1 - \Omega(p_e)$$

za vrijednosti $a = \bar{a} = \frac{1}{2}$.

Zadatak 4.5.

Prijenos vijesti provodi se alfabetom s 8 različitih simbola predstavljenih signalima trajanja
$\tau = 1$ ms.

Ako je vjerojatnost predaje simbola:

$$p(x_i) = 2^{-i}, \quad i = 1,2,3,\dots,7$$

$$p(x_7) = p(x_8)$$

Odredite brzinu predaje vijesti i kapacitet kanala:

a) Bez smetnji u kanalu
b) Sa smetnjama u kanalu koje umanjuju entropiju izvora za 25 %.

Rješenje:

Zadane apriorne vjerojatnosti su:

$p(x_1) = \frac{1}{2}$ $\quad p(x_2) = \frac{1}{4}$ $\quad p(x_3) = \frac{1}{8}$ $\quad p(x_4) = \frac{1}{16}$

$p(x_5) = \frac{1}{32}$ $\quad p(x_6) = \frac{1}{64}$ $\quad p(x_7) = \frac{1}{128}$ $\quad p(x_8) = \frac{1}{128}$

Entropija izvora je u oba slučaja jednaka i iznosi:

$$H(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p(x_i)} = 1{,}985\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Brzina predaje vijesti je, također, jednaka u oba slučaja i iznosi:

$$v = \frac{H(\mathrm{X})}{\tau} = \frac{1{,}985}{1 \cdot 10^{-3}} = 1985\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}$$

a) Kapacitet predstavlja maksimalnu vrijednost prosječne uzajamnje količine informacija:

$$C = \frac{\max I(X,Y)}{\tau}$$

U kanalu bez smetnja prosječna uzajamnja količina informacije bit će jednaka entropiji izvora, pa vrijedi:

$$C = \frac{\max H(X)}{\tau}$$

Entropija izvora će biti maksimalna kad su sve apriorne vjerojatnosti simbola međusobno jednake. U ovom slučaju, maksimalna entropija izvora iznosi:

$$H_{max}(X) = 3\ \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}, \quad za\ P(x_i) = \frac{1}{8}$$

Kapacitet je onda jednak:

$$C_a = \frac{H_{max}(X)}{\tau} = 3\ 000\ \frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}$$

b) U kanalu gdje postoji opisana smetnja, maksimalna vrijednost prosječne uzajamne količine informacija bit će:

$$\max I(X,Y) = H_{max}(X) - \frac{H_{max}(X)}{4} = \frac{3}{4} H_{max}(X)$$

pa će kapacitet kanala biti:

$$C_b = \frac{3}{4} C_a = 2\ 250 \frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{s}}$$

Zadatak 4.6.

Odrediti kapacitet kanala čija je kanalna matrica:

$$M = \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & q & p \end{pmatrix} = p(y_j / x_i)$$

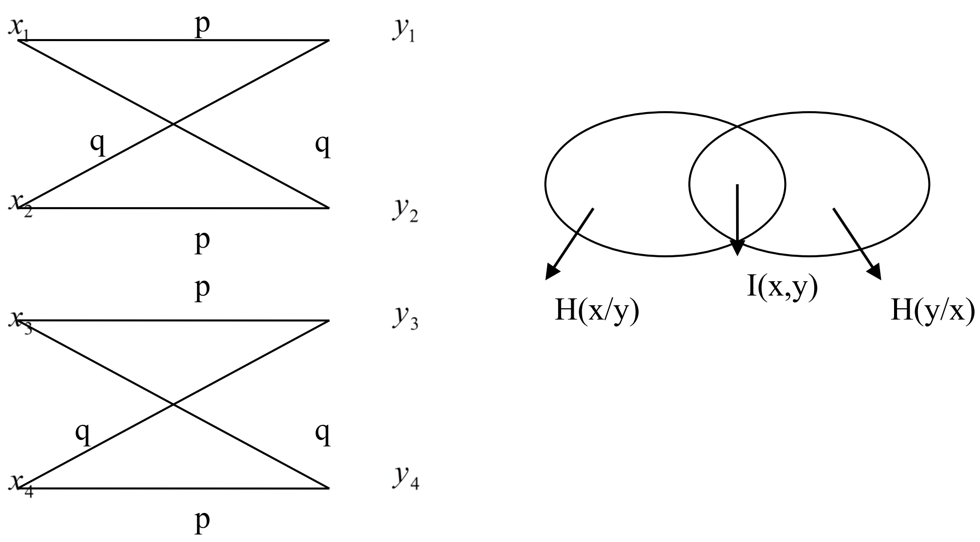
Rješenje:

Kanalnom matricom zadane su uvjetne vjerojatnosti $p(y_j|x_i)$:

$$p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = p(y_3|x_3) = p(y_4|x_4) = p$$

$$p(y_1|x_2) = p(y_2|x_1) = p(y_3|x_4) = p(y_4|x_3) = q$$

$$p(y_1|x_3) = p(y_1|x_4) = p(y_2|x_3) = p(y_2|x_4) =$$
$$= p(y_3|x_1) = p(y_3|x_2) = p(y_4|x_1) = p(y_4|x_2) = 0$$



Slika 4.6. Grafovi kanala i Vennovi dijagrami za prikaz odnosa između uvjetnih entropija i uzajamne količine informacija

Kapacitet se računa na sljedeći način

$$C = \max I(X,Y)$$

pri čemu je:

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) \cdot \mathrm{ld}\,\frac{1}{p(y_j)}$$

$$H(Y|X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \cdot \mathrm{ld}\,\frac{1}{p(y_j|x_i)}$$

Uzmimo da je:

$$p(x_1) = a_1$$

$$p(x_2) = a_2$$

$$p(x_3) = a_3$$

$$p(x_4) = a_4$$

pa vrijedi:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

Matrica zajedničkih vjerojatnosti onda izgleda kao:

$$M' = \begin{bmatrix} a_1 \cdot p & a_1 \cdot q & 0 & 0 \\ a_2 \cdot q & a_2 \cdot p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \cdot p & a_3 \cdot q \\ 0 & 0 & a_4 \cdot q & a_4 \cdot p \end{bmatrix} = p(x_i, y_j)$$

pa je:

$$H(Y|X) = a_1 \cdot p \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p} + a_1 \cdot q \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{q} + a_2 \cdot q \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{q} + a_2 \cdot p \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p} +$$
$$+ a_3 \cdot p \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p} + a_3 \cdot q \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{q} + a_4 \cdot q \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{q} + a_4 \cdot p \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p}$$

to jest:

$$H(Y|X) = p \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + q \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{q} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) =$$
$$= p \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p} + q \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{q} = -(p \cdot \mathrm{ld}p + q \cdot \mathrm{ld}q) = \mathrm{konst.}$$

Budući da je:

$$C = \max\big(I(X,Y)\big) = \max\big(H(Y) - H(Y|X)\big) = \max(H(Y) + p \cdot \mathrm{ld}p + q \cdot \mathrm{ld}q) =$$
$$= \max(H(Y)) + p \cdot \mathrm{ld}p + q \cdot \mathrm{ld}q$$

ostaje još naći maksimalnu vrijednost entropije odredišta.

Entropija $H(Y)$ će biti maksimalna za jednake vjerojatnosti događaja y_j na odredištu, dakle:

$$p(y_1) = p(y_2) = p(y_3) = p(y_4) = \frac{1}{4}$$

i iznosit će:

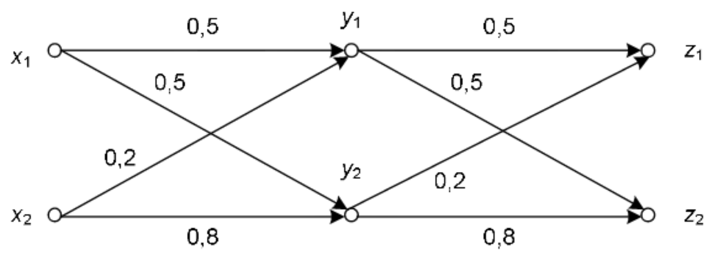
$$H(Y) = \sum_{j=1}^{m} p(y_j) \cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p(y_j)} = 2\,\frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{simb}}$$

Kapacitet će onda biti jednak:

$$C = 2 + p \cdot \mathrm{ld}p + q \cdot \mathrm{ld}q$$

Zadatak 4.7.

Dva binarna kanala serijski su povezana kako je to predočeno na sljedećoj slici. Odredite matricu ekvivalentnog kanala koji predstavlja kaskadnu vezu ovih dvaju, ako je $P(x_1)=P(x_2)=0{,}5$. Skicirajte novonastali diskretni komunikacijski kanal.



Slika 4.7. Kaskadna veza dva binarna kanala

Rješenje:

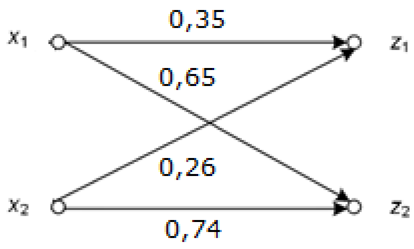
Da bismo odredili matricu ekvivalentnog kanala sa slike, potrebno je odrediti pojedinačne kanalne matrice:

$$M_1 = M_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentna se matrica dobiva množenjem pojedinačnih:

$$M = M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,26 & 0,74 \end{pmatrix}$$

Graf ekvivalentnog kanala prikazan je na slici:



Slika 4.8. Graf ekvivalentnog binarnog kanala

Zadatak 4.8.

Za sustav kao na slici izračunajte širinu frekvencijskoga propusnog pojasa kanala B pod uvjetom da ne dođe do izobličenja informacije u kanalu.

Slika 4.9. Zadani sustav

W – širina spektra izvornog signala
B – širina frekvencijskog propusnog pojasa kanala

Rješenje:

Kako ne bi došlo do izobličenja unutar dekodera, mora biti ispunjeno:

$$C_1 = C_2$$

pri čemu je:

$$C_1 = B \cdot \mathrm{ld}(1 + SNR_i)$$

$$C_2 = W \cdot \mathrm{ld}(1 + SNR_o)$$

Iz gornjih izraza lako se izračuna traženi frekvencijski opseg kanala B:

$$B = \frac{W \cdot \mathrm{ld}(1 + SNR_o)}{\mathrm{ld}(1 + SNR_i)}$$

to jest:

$$B = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{ld}(1 + 10^4)}{\mathrm{ld}(1 + 10)} = 16 \text{ kHz}$$

Zadatak 4.9.

Kontinualni kanal opisan je snagom signala $P_s = S_0 \cdot B$ i snagom šuma $P_š = N_0 \cdot B$. S_0 i N_0 su spektralne gustoće snage signala i snage šuma, respektivno, i iznose: $S_0 = 10^{-6} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$, $N_0 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$. Širina kanala je $B = 10^4 \mathrm{Hz}$.

a) Izračunajte kapacitet kanala
b) Kolik je kapacitet kanala ako se pretpostavi da širina kanala B teži k beskonačnosti?

Rješenje:

a) Kapacitet kanala računa se prema izrazu:

$$C = B \cdot \mathrm{ld}(1 + SNR)$$

pri čemu je

$$SNR = \frac{P_s}{P_š} = \frac{S_0 \cdot B}{N_0 \cdot B} = \frac{S_0}{N_0} = \frac{10^{-6}}{\frac{1}{2} \cdot 10^{-8}} = 200$$

Tada se dobiva da je kapacitet:

$$C = 10^4 \cdot \mathrm{ld}(1 + 200) = 76{,}5 \ \frac{\mathrm{kSh}}{\mathrm{s}}$$

b) Kapacitet ćemo izračunati uz pomoć graničnog procesa kada pustimo da opseg B neograničeno raste (pri čemu neograničeno raste i snaga šuma $P_N = \nu \cdot B$):

$$C = \lim_{B \to \propto} B \cdot \mathrm{ld}\left(1 + \frac{P}{\nu B}\right) = \lim_{B \to \propto} B \frac{P}{\nu} \cdot \frac{\nu}{P} \mathrm{ld}\left(1 + \frac{P}{\nu B}\right) = \frac{P}{\nu} \lim_{B \to \propto} \mathrm{ld}\left(1 + \frac{P}{\nu B}\right)^{\frac{\nu B}{P}} = \frac{P}{\nu} \mathrm{ld}\, e$$

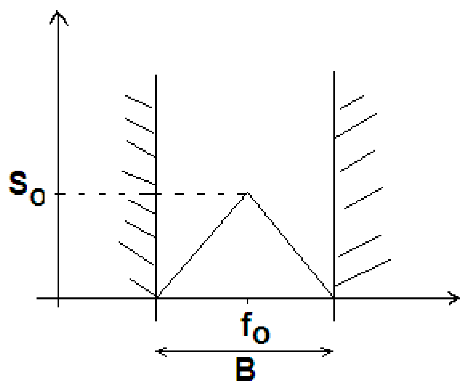
Prema tomu, iako je opseg beskonačan, zbog beskonačne snage šuma kapacitet ovoga kanala ostaje konačan.

Zadatak 4.10.

U kontinualnom kanalu širine $B = 4\,kHz$, na signal sa spektralnom gustoćom snage $S_0 = 10^{-3}\dfrac{W}{Hz}$ čija je razdioba dana na slici 4.9. djeluje aditivni šum gustoće snage $N_0 = 5 \cdot 10^{-5}\dfrac{W}{Hz}$. Izračunati kolika je količina energije potrebna za prijenos jednog bita informacije. Kolika je pogreška u kanalu ako je izraz za vjerojatnost pogreške zadan u obliku $P_e = \dfrac{1}{2}e^{-\left(\frac{P_s}{P_š}\right)}$?

Uputa:

Formula za količinu energije potrebne za prijenos jednog bita informacije je $\frac{E}{b} = \frac{P_s}{C}$.



Slika 4.10. Razdioba spektralne gustoće snage signala

Rješenje:

Prema uputi, količina energije potrebna za prijenos jednog bita informacije računa se prema izrazu:

$$\frac{E}{b} = \frac{P_s}{C}$$

Da bismo izračunali kapacitet kanala, potrebno je prvo izračunati snagu signala i snagu šuma.

Za proračun snage signala koristit ćemo se podatkom o razdiobi spektralne gustoće snage zadane slikom. Snaga signala jednaka je površini ispod krivulje (u ovom slučaju trokut) koja opisuje razdiobu spektralne gustoće snage, to jest:

$$P_s = \frac{1}{2} \cdot S_0 \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^3 = 2\ \mathrm{W}$$

Spektralna gustoća snage bijelog šuma uvijek je jednaka na cijelom frekvencijskom opsegu, pa je stoga snaga šuma:

$$P_š = N_0 \cdot B = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 10^3 = 0{,}2\ \mathrm{W}$$

Sada je lako izračunati kapacitet kanala:

$$C = B \cdot \mathrm{ld}(1 + SNR) = 4 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{ld}\left(1 + \frac{2}{0{,}2}\right) = 13{,}84 \frac{\mathrm{kSh}}{\mathrm{s}}$$

Količina energije potrebna za prijenos jednog bita informacije bit će:

$$\frac{E}{b} = \frac{P_s}{C} = \frac{2}{13{,}84 \cdot 10^3} = 0{,}15\ \frac{\mathrm{mJ}}{\mathrm{bit}}$$

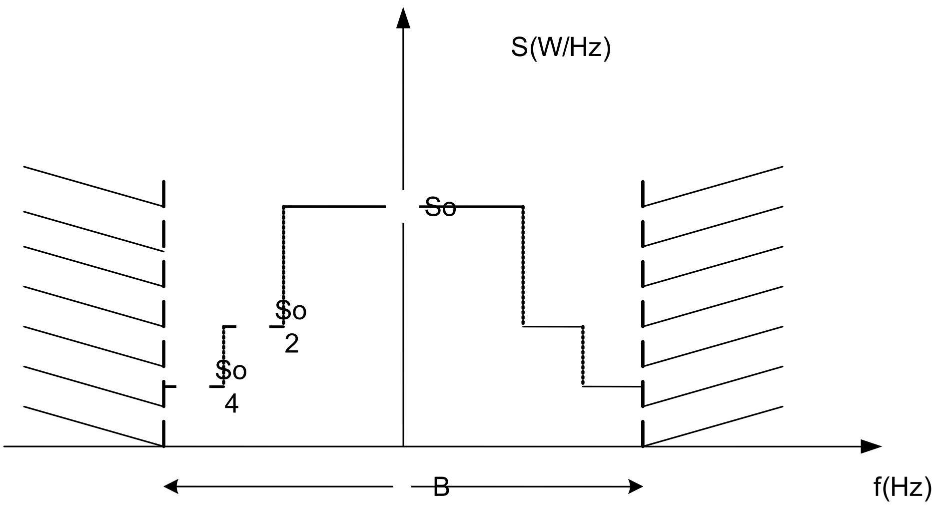
Pogreška u kanalu računa se kao:

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot e^{-\left(\frac{P_s}{P_š}\right)} = \frac{1}{2} \cdot e^{-10} = 2{,}27 \cdot 10^{-5}$$

Zadatak 4.11.

Neka se nađe kapacitet kontinualnog konvencionalnog kanala, gdje je spektralna gustoća snage signala dana prema slici. Prisutan je nekorelirani šum spektralne gustoće snage uniformne razdiobe, i zadano je:

B = 100 kHz, $S_0 = 10^{-8}$ W/Hz, $N_0 = 10^{-10}$ W/Hz



Slika 4.11. Razdioba spektralne gustoće snage signala

Rješenje:

Da bismo izračunali kapacitet kanala, potrebno je prvo naći snagu signala i snagu šuma.

Za proračun snage signala koristit ćemo se podatkom o razdiobi spektralne gustoće snage zadane slikom. Snaga signala jednaka je površini ispod krivulje koja opisuje razdiobu spektralne gustoće snage, to jest:

$$P_s = S_0 \cdot \frac{B}{2} + 2 \cdot \frac{S_0}{2} \cdot \frac{B}{8} + 2 \cdot \frac{S_0}{4} \cdot \frac{B}{8} = \frac{11}{16} \cdot S_0 \cdot B = \frac{11}{16} \cdot 10^{-8} \cdot 100 \cdot 10^3 = 0{,}69 \text{ mW}$$

Spektralna gustoća snage bijelog šuma uvijek je jednaka na cijelom frekvencijskom opsegu, pa je stoga snaga šuma:

$$P_š = N_0 \cdot B = 10^{-10} \cdot 100 \cdot 10^3 = 0{,}01 \text{ mW}$$

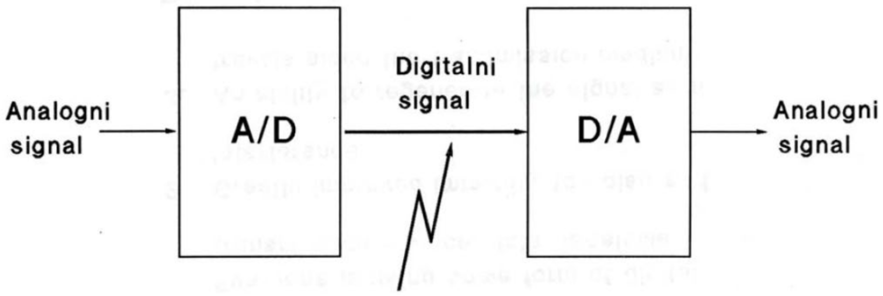
Sada je lako izračunati kapacitet kanala:

$$C = B \cdot \mathrm{ld}(1 + SNR) = 100 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{ld}\left(1 + \frac{0{,}69}{0{,}01}\right) = 613 \ \frac{\text{kSh}}{\text{s}}$$

5.

ANALOGNO-DIGITALNA PRETVORBA

Analogno-digitalna pretvorba znači pretvaranje analogne veličine (najčešće napona) u ekvivalentnu digitalnu vrijednost.

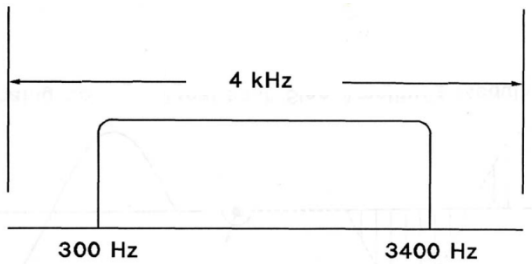


Slika 5.1. Analogno-digitalna pretvorba

Impulsno-kodna modulacija

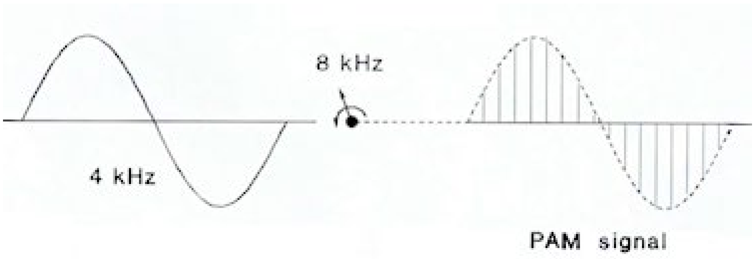
Impulsno-kodnom modulacijom obavlja se analogno-digitalna (A-D) pretvorba analognog signala u digitalni, što se izvodi u sljedećim koracima:

1. Ograničenje frekvencijske širine pojasa analognog signala uz pomoć filtra koji guši sve komponente signala izvan ciljanoga područja. No, kako filtar ima konačnu strminu, gušenje frekvencija izvan propusnog područja filtra nije oštro, pa se ograničava nešto širi frekvencijski pojas od nužno potrebnoga. (Primjerice, u klasičnoj fiksnoj telefoniji, učinjen je kompromis između dovoljne snage i razumljivosti govora. To implicira da zahtijevani odnos *S/N* bude 30 – 40 dB. Analogni signal ograničava se na frekvencijski pojas od 300 Hz do 3 400 Hz, ali se svakome kanalu, zbog konačne strmine filtra, dodjeljuju 4 kHz.), slika 5.2.



Slika 5.2. Ograničavanje frekvencijskog pojasa signala

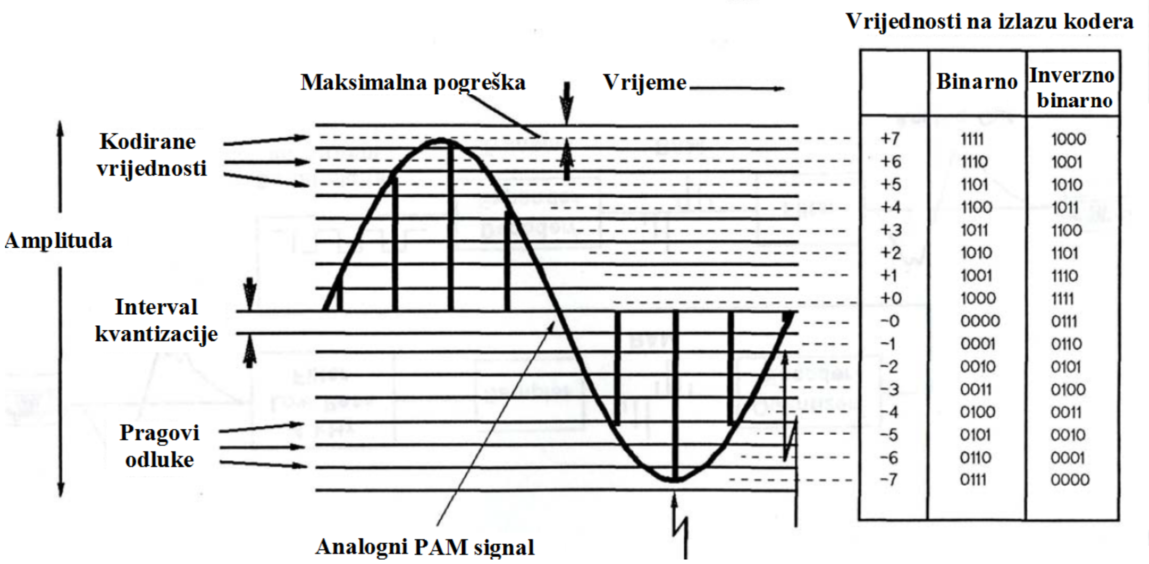
2. Uzimanje uzorka (vremenska diskretizacija) provodi se sukladno *Nyquistovu* pravilu, dakle frekvencijom koja je najmanje 2 puta veća od najviše frekvencije u spektru analognoga signala. Tako je za naš primjer impulsno-kodne telefonije (*Pulse Code Modulation* – PCM), odabrana frekvencija uzorkovanja od 8 kHz, tj. svakih 125 µs, što implicira da su svi vremenski intervali kojima se koristi u telefonskom sustavu,



višekratnici od 125 µs; slika 5.3.

Slika 5.3. Vremenska diskretizacija (uzimanje uzorka) signala

3. Kodiranje uzoraka provodi se minimalno potrebnim brojem bita koji osigurava dovoljnu aplitudnu razlučivost uzoraka signala, a što ovisi o dinamičkom opsegu signala. (Primjerice, prema standardu PCM A-D konverzije, minimalno je potrebno razlikovati 256 različitih amplitudskih razina signala, što omogućuje kodiranje s 8 bita po uzorku, te konačno brzinu PCM prijenosa govornog kanala od: 8 kHz x 8 bit/uzorku = 64 kbit/s, slika 5.4.



Slika 5.4. Amplitudska diskretizacija i kodiranje vremenski diskretiziranoga signala

Zadatci za vježbu

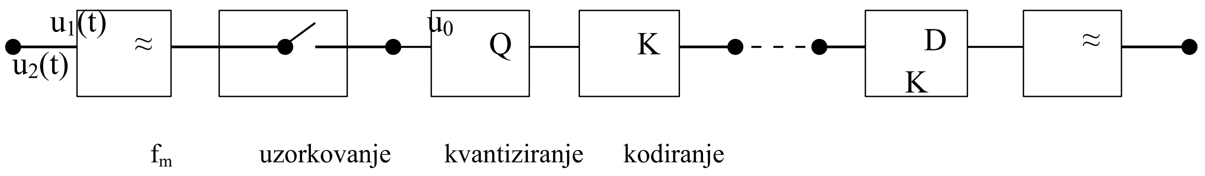
Zadatak 5.1.

Na slici 5.4. prikazana je blok-shema sustava za prijenos signala PCM (impulsno-kodnom modulacijom). Uzorkovanje signala $u_1(t)$ vrši se u trenucima $t_1 = k \cdot T_0$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2)$, $T_0 = 100 \mu s$. Amplitude uzoraka signala $u_1(t)$ nalaze se u intervalu $|u_1(t)| \leq 0{,}8V$ i kvantiziraju se u kvantizatoru Q tako što je taj interval uzorkovan ravnomjerno na 8 kvantizacijskih razina. U koderu K obavlja se kodiranje kvantiziranih uzoraka binarnim kodom. Prijamnik se sastoji od dekodera i idealnog filtra prijenosnika niskih frekvenacija.

Ako je

$$u_1(t) = u \cdot \sin\left(\omega_m t + \frac{\pi}{4}\right), \quad u = 0{,}8\text{ V}, \quad f_m = 2\text{kHz}$$

prikažite vremenske oblike signala na izlazu iz bloka za uzorkovanje, kvantizatora i kodera za vrijeme jednog perioda signala $u_1(t)$.



Slika 5.5. Blok-shema PCM sustava

Rješenje:

Potrebno je provjeriti zadovoljava li zadana frekvencija uzorkovanja Niquistov uvjet:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}}\text{Hz} \geq 2 \cdot 2\text{ kHz}$$

Kako je period zadanog signala jednak:

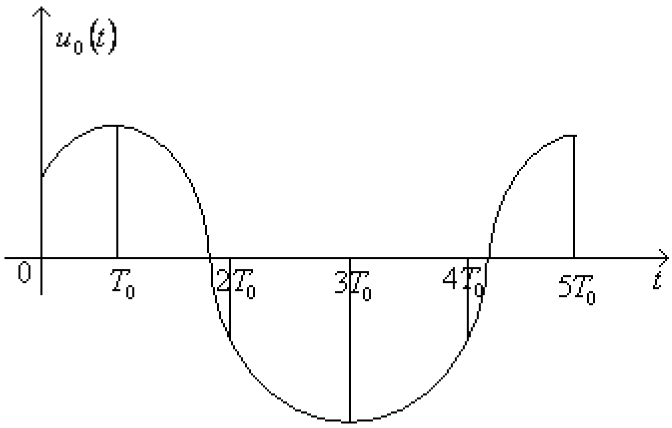
$$T_m = \frac{1}{f_m} = \frac{1}{200 \cdot 10^3} = 500\ \mu\text{s}$$

zaključujemo da ćemo unutar jednog perioda signala imati 5 uzoraka.

U sljedećoj tablici dani su uzorci u svakom od trenutaka uzorkovanja unutar prvog perioda (za $t = k \cdot T_0$, $k = 0, 1, 2, \dots, 5$).

t	0	T_0	$2T_0$	$3T_0$	$4T_0$	$5T_0$
u_0	0,565	0,713	−0,125	−0,79	−0,363	0,565

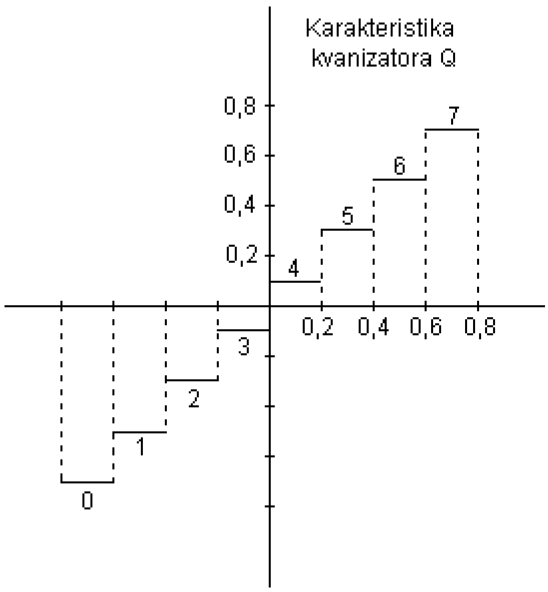
Vremenski oblik signala $u_0(t)$ izgledat će kao na slici 5.6.:



Slika 5.6. Vremenski oblik signala na izlazu iz bloka za uzorkovanje

Kvantizator ima 8 kvantizacijskih razina i njegova karakteristika prikazana je na slici 5.7.

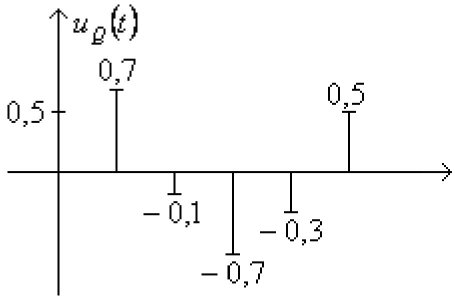
Nakon prolaska kroz blok kvantizatora, vrijednosti uzoraka „zaokružuju" se sukladno karakteristici kvantizatora; slika 5.7..



Slika 5.7. Karakteristika kvantizatora

t	0	T_0	$2T_0$	$3T_0$	$4T_0$	$5T_0$
u_0	0,565	0,713	$-0{,}125$	$-0{,}79$	$-0{,}363$	0,565
$u_Q(t)$	0,5	0,7	$-0{,}1$	$-0{,}7$	$-0{,}3$	0,5

Vremenski oblik signala nakon prolaska kroz blok kvantizatora prikazan je na slici 5.8.



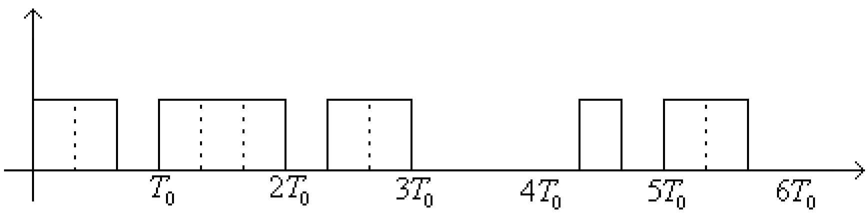
Slika 5.8. Vremenski oblik signala na izlazu iz bloka za kvantiziranje

Za jednoznačno kodiranje 8 različitih kvantizacijskih razina binarnim ravnomjernim kodom potrebna su 3 bita. Svakoj kvantizacijskoj razini pridružuje se jedna kodna riječ prema tablici ispod.

Razina	Kodna riječ	Razina	Kodna riječ
0	000	4	100
1	001	5	101
2	010	6	110
3	011	7	111

Izgled signala nakon prolaska kroz blok kodera prikazan je na slici 5.9.

t	0	T_0	$2T_0$	$3T_0$	$4T_0$	$5T_0$
u_0	0,565	0,713	$-0{,}125$	$-0{,}79$	$-0{,}363$	0,565
$u_Q(t)$	0,5	0,7	$-0{,}1$	$-0{,}7$	$-0{,}3$	0,5
Razina	6	7	3	0	2	6
Kodna riječ	110	111	011	000	010	110



Slika 5.9. Vremenski oblik signala na izlazu iz bloka za kodiranje

Zadatak 5.2.

Od 30 telefonskih signala formirana je primarna digitalna grupa koja se dalje prenosi kroz sustav prijenosa. Svi telefonski signali ograničeni su niskopropusnim filtrom s $f_c = 4\ kHz$. Primijenjena je impulsno-kodna modulacija s $f_0 = 8\ kHz$ i $q = 256$ kvantizacijskih razina s binarnim kodiranjem. Unutar jednog perioda uzorkovanja pored bita telefonskog signala, ubačeno je 8 bitova za signalizaciju i 8 bitova za sinkronizaciju.

a) Nacrtajte i objasniti strukturu okvira.
b) Izračunajte brzinu protoka.

Rješenje:

Kada se kroz jednu liniju istovremeno želi prenijeti više signala u intervalu trajanja od jednog perioda odabiranja, koristi se principom vremenskog multipleksiranja. Ovom je metodom period odabiranja podijeljen na onoliko segmenata koliko se signala želi prenijeti.

a) Potrebno je provjeriti je li zadovoljen *Niquistov* uvjet:

$$f_0 = 8\ \text{kHz} \geq 2 \cdot 4\ \text{kHz} = 2 \cdot f_c$$

Period uzorkovanja računa se kao:

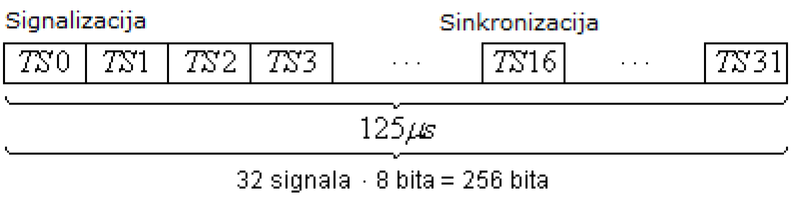
$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 125\ \mu\text{s} = T_{okvira}$$

i ujedno u ovom slučaju određuje duljinu trajanja okvira.

Budući da kvantizator ima 256 kvantizacijskih razina, za kodiranje binarnim ravnomjernim kodom potrebno je 8 bitova, to jest:

$$n = 8$$

Okvir će se sastojati od 30 vremenskih odsječaka (za po jedan ouzorak od svakog od 30 telefonskih signala) i još 2 vremenska odsječka rezervirana za signalizaciju i sinkronizaciju okvira.



Slika 5.10. Struktura okvira

b) Bitska brzina protoka računa se na sljedeći način:

$$v_b = \frac{duljina\ okvira}{trajanje\ okvira} = \frac{256}{125 \cdot 10^{-6}} = 2{,}048\ \text{Mbps}$$

Zadatak 5.3.

U sustavu s impulsno-kodnom modulacijom prenose se 32 telefonska signala, pri čemu se nultim i šesnaestim koriste kao pomoćnima. Ovim sustavom treba prenijeti *mux*-signal koji je sačinjen od $N = 6$ telefonskih signala i M muzičkih signala. Karakteristike signala su sljedeće:

- Telefonski
  $q = 256$ $\qquad$ $f_{max} = 4$ kHz

- Muzički
  $f_{max} = 16$ kHz $\qquad$ $\left(\frac{P_S}{P_Š}\right)_{KVANT} = 80 \text{ dB}$

a) Izračunajte minimalnu frekvenciju uzorkovanja muzičkih signala tako da ona bude umnožak od 4 kHz.
b) Izračunajte broj muzičkih signala koji se mogu prenijeti ovim sustavom.

Rješenje:

a) Minimalnu frekvenciju uzorkovanja muzičkih signala izračunat ćemo primjenom *Niquistova* uvjeta:

$$f_{0M} \geq 2 \cdot 16 \text{ kHz} = 32 \text{ kHz}$$

to jest

$$f_{0M} = 32 \text{ kHz}$$

Tada je period uzorkovanja muzičkih signala jednak:

$$T_{0M} = \frac{1}{f_{0M}} = 31{,}25 \ \mu\text{s}$$

Period uzorkovanja telefonskih signala bit će:

$$T_{0T} = \frac{1}{f_{0T}} = 125 \ \mu\text{s} = T_{okvira}$$

b) Duljina okvira u kojem će biti smješteni uzorci telefonskih i muzičkih signala jednaka je:

$$N \cdot N_{0T} \cdot n_T + M \cdot N_{0M} \cdot n_M = 256\text{b}$$

pri čemu je:

N – broj telefonskih signala

M – broj muzičkih signala

N_{0T} – broj uzoraka jednog telefonskog signala unutar okvira

N_{0M} – broj uzoraka jednog muzičkog signala unutar okvira

n_T – broj bitova po uzorku telefonskog signala

n_M – broj bitova po uzorku muzičkog signala

Sukladno prethodnom zadatku, telefonski će se signali kodirati s 8 bitova (256 kvantizacijskih razina u kvantizatoru) pa vrijedi:

$$n_T = 8$$

Za muzičke signale će se broj kvantizacijskih razina (i posljedično broj bitova po uzorku) odrediti iz uvjeta za vrijednost odnosa snaga signala i šuma prema sljedećoj relaciji:

$$\left(\frac{P_s}{P_š}\right)_{KVANT} [\mathrm{dB}] = 10 \log q^2 = 80 \text{ dB}$$

$$q^2 = 10^{\frac{80}{10}}$$

$$q = 10\,000 \leq 2^{n_M}$$

Broj bitova po uzorku jednog muzičkog signala iznosit će:

$$n_M = 14$$

Broj uzoraka jednog telefonskog i jednog muzičkog signala unutar okvira računamo na sljedeći način:

$$N_{0T} = \frac{T_{okvira}}{T_{0T}} = 1$$

$$N_{0M} = \frac{T_{okvira}}{T_{0M}} = 4$$

Sada konačno možemo izračunati broj muzičkih signala iz relacije:

$$N \cdot N_{0T} \cdot n_T + M \cdot N_{0M} \cdot n_M = 256 \text{ b}$$

$$M = \frac{256 - N \cdot N_{0T} \cdot n_T}{N_{0M} \cdot n_M} = 3{,}7$$

to jest, budući da broj muzičkih signala mora biti prirodan, bit će $M = 3$.

6.

RAZDIOBA VJEROJATNOSTI SLUČAJNE VARIJABLE

Za potpunu karakterizaciju slučajne varijable bitno je uz njezin rang znati i s kakvim vjerojatnostima se mogu pojaviti njene različite vrijednosti. Time je za tu slučajnu varijablu određena *razdioba vjerojatnosti*.

Neposredno zadavanje vjerojatnosti

Za neku diskretnu varijablu ξ koja poprima vrijednosti x_1, x_2, x_3, ... dovoljno je znati odgovarajuće vjerojatnosti:

$$P(\xi = x_i) = p_i$$

Vjerojatnosti p_i su pozitivni brojevi za koje vrijedi *uvjet normiranja*:

$$\sum_i p_i = 1$$

pri čemu suma obuhvaća sve vrijednosti indeksa i kojim su označene razne vrijednosti slučajne varijable ξ.

Gustoća vjerojatnosti

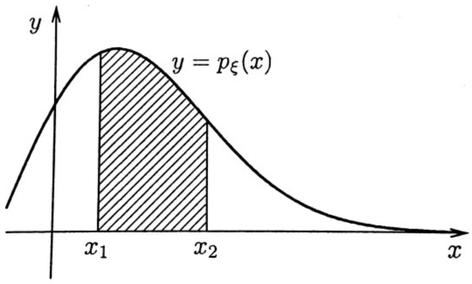
Drugi način opisivanja razdiobe vjerojatnosti pogodan je za kontinualne slučajne varijable. *Gustoća vjerojatnosti* je funkcija jedne realne varijable x, definirana na cijeloj realnoj osi (eng. *probability density function* – pdf):

$$p_\xi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(x - \frac{\Delta x}{2} < \xi < x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

Dakle, gustoća vjerojatnosti slučajne varijable ξ u točki x dobiva se tako da se uzme vjerojatnost da ξ ima vrijednost u intervalu širine Δx, i potom prijeđe na graničnu vrijednost limes $\Delta x \to 0$.

Vjerojatnost se iz gustoće dobiva integracijom. Na primjer, vjerojatnost da ξ ima vrijednost u danom intervalu [x_1, x_2] je:

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_\xi\,(x)dx$$



Slika 6.1. Primjer funkcije gustoće vjerojatnosti

Geometrijska interpretacija ovog rezultata sasvim je jednostavna. Vjerojatnost da slučajna varijabla ξ ima vrijednost u intervalu [x_1, x_2] predstavljena je površinom ispod krivulje $y = p_\xi(x)$ u tom intervalu.

Treba uočiti da odavde slijedi jedno važno svojstvo kontinualnih slučajnih varijabla: vjerojatnost da ξ uzme neku točno određenu vrijednost jednaka je nuli:

$$P(\xi = \mathrm{x}) = 0$$

Ovo je karakteristično svojstvo kontinualnih slučajnih varijabla. Za njih ima smisla promatrati slučajne događaje određene intervalima, a ne pojedinim točkama.

Za gustoću vjerojatnosti vrijedi i uvjet normiranja:

$$\int_{-\propto}^{\propto} p_\xi\,(x)dx = 1$$

Kumulativna funkcija razdiobe

Za svaku slučajnu varijablu razdioba vjerojatnosti može se definirati i uz pomoć *kumulativne funkcije razdiobe*:

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Važno je odmah uočiti da je $F_\xi(x)$ realna funkcija kojoj je definicijsko područje čitava realna os.

Osobine kumulativne funkcije razdiobe (eng. *cumulative density function* – cdf) su sljedeće:

- $F_\xi(x)$ je monotona funkcija, tj.:

$$F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2) \quad za \quad x_1 < x_2$$

- Granične vrijednosti funkcije $F_\xi(x)$ su:

$$\lim_{x \to -\propto} F_\xi(x) = 0$$
$$\lim_{x \to +\propto} F_\xi(x) = 1$$

- Iz funkcije $F_\xi(x)$ se mogu dobiti vjerojatnosti:

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)$$

1. Za diskretnu slučajnu varijablu ξ, funkcija razdiobe ima konačan ili najviše prebrojiv uređen skup točaka prekida

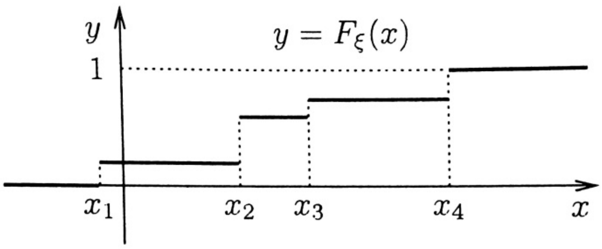
$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

Skok

$$p_k = F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k - 0)$$

jednak je vjerojatnosti da ξ ima vrijednost x_k. U intervalima između susjednih točaka prekida F_ξ je konstantna.

Na primjer, slučajna varijabla kojoj je funkcija razdiobe prikazana na sljedećoj slici, očito je diskretna i može primati četiri vrijednosti x_1, x_2, x_3 i x_4.



Slika 6.2. Primjer kumulativne funkcije razdiobe za diskretnu slučajnu varijablu

S pomoću Heavisideove step-funkcije:

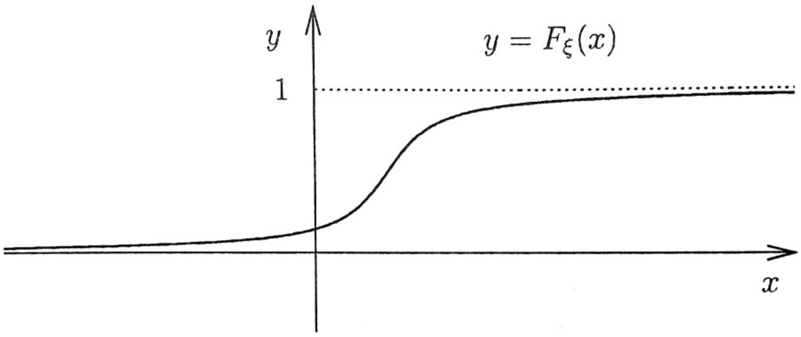
$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

funkciju razdiobe diskretne slučajne varijable možemo napisati u obliku:

$$F_\xi = \sum_k p_k u(x - x_k)$$

2. Za kontinualnu slučajnu varijablu funkcija razdiobe je kontinualna (neprekidna) funkcija. U sklopu ovog kolegija proučavat će se samo neprekidne slučajne varijable kojima je funkcija razdiobe ujedno i diferencijabilna svuda osim eventualno u nekim izoliranim točkama.

Grafik funkcije razdiobe tipične kontinualne slučajne varijable ξ dan je na sljedećoj slici.



Slika 6.3. Primjer kumulativne funkcije razdiobe za kontinualnu slučajnu varijablu

3. Konačno, za slučajnu varijablu ξ miješanog tipa, funkcija razdiobe ima konačan broj točaka prekida $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$, a u intervalima između njih mijenja se kontinualno. Ako označimo skokove s:

$$p_k = F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k - 0)$$

onda je funkcija:

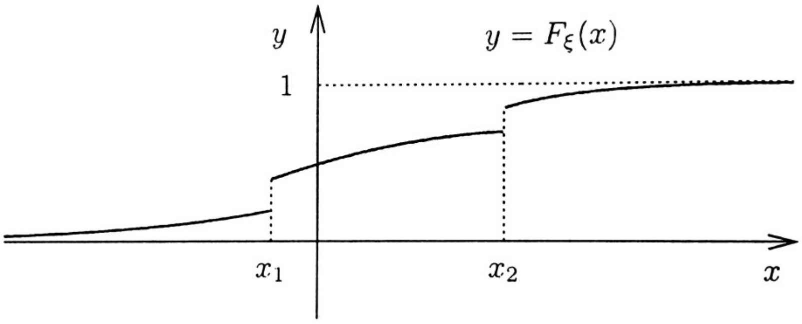
$$F(x) = F_\xi(x) - \sum_k p_k u(x - x_k)$$

neprekidna i monotono rastuća (ili barem neopadajuća) na čitavoj realnoj osi.

Prema tome, funkcija razdiobe za slučajnu varijablu miješanog tipa ima oblik:

$$F_\xi(x) = \sum_k p_k u(x - x_k) + F(x)$$

Na sljedećoj slici prikazana je funkcija razdiobe za slučajnu varijablu miješanog tipa.



Slika 6.4. Primjer kumulativne funkcije razdiobe za slučajnu varijablu mješovitog tipa

Gustoća vjerojatnosti dobiva se deriviranjem funkcije razdiobe za određenu slučajnu varijablu i pogodna je za opis razdiobe vjerojatnosti kontinualnih slučajnih varijabla. No, i za diskretne slučajne varijable može se uvesti gustoća vjerojatnosti.

Za diskretnu slučajnu varijablu ξ funkcija razdiobe je kombinacija Heavisideovih funkcija kako je prethodno već objašnjeno. Derivacija takve funkcije imat će sljedeći oblik:

$$p_{\xi}(x) = \sum_{k} p_k \delta(x - x_k)$$

pri čemu je $\delta(x)$ Diracova delta funkcija s glavnom osobinom:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - x_0)dx = \begin{cases} 1 & ako\ je\ x_0\ u\ intervalu\ (x_1, x_2) \\ 0 & ako\ je\ x_0 < x_1\ ili\ x_0 > x_2 \end{cases}$$

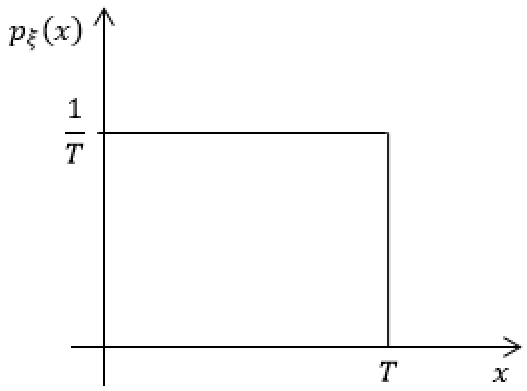
Zadatci za vježbu

Zadatak 6.1.

Telefonski poziv pojavljuje se slučajno u vremenskom intervalu $[0, T]$. Slučajna varijabla ξ definira se kao slučajan trenutak pojavljivanja poziva. Odrediti funkciju gustoće i kumulativnu funkciju razdiobe slučajne varijable ξ.

Rješenje:

Slučajna varijabla ξ definirana na ovakav način je kontinualna s rangom x na kontinualnom intervalu $[0, T]$.



Slika 6.5. Graf funkcije gustoće vjerojatnosti za zadanu slučajnu varijablu

Funkcija gustoće razdiobe slučajne varijable ξ je:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{T}, \text{za } 0 \le x \le T \\ 0, \quad \text{drugdje} \end{cases}$$

Kumulativna funkcija razdiobe slučajne varijable ξ dobiva se sljedećim opisanim postupkom.

Za $x \le 0$ poziv se ne pojavljuje, pa je:

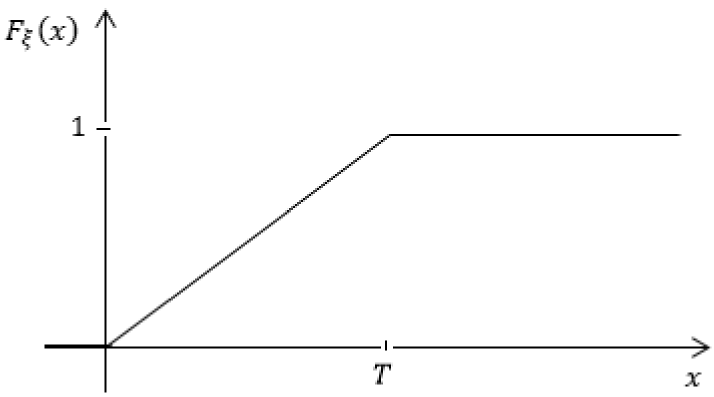
$$F_\xi(x) = P\{\xi \le x\} = F_\xi(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = 0$$

Za $0 \le x \le T$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \le x\} = F_\xi(0) + \int_{0}^{x} p_\xi(t)\,dt = \frac{x}{T}$$

Za $x > T$ poziv se sigurno pojavio, pa je:

$$F_\xi(x) = P\{\xi \le x\} = F_\xi(T) + \int_{T}^{x} p_\xi(t)\,dt = 1$$



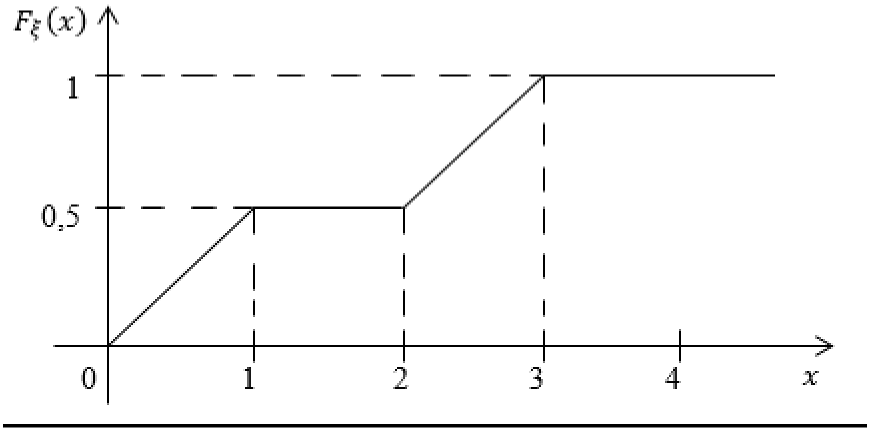
Slika 6.6. Graf kumulativne funkcije razdiobe za zadanu slučajnu varijablu

Dobiva se, dakle, da je kumulativna funkcija razdiobe jednaka:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \;\; za\; x \le 0 \\ \frac{x}{T} \;\; za\; 0 \le x \le T \\ 1 \;\; za\; x > T \end{cases}$$

Zadatak 6.2.

Kumulativna funkcija razdiobe slučajne varijable ξ zadana je kao na slici 6.7. Odredite njezin analitički izraz, te funkciju gustoće slučajne varijable ξ. Kolika je vjerojatnost da je slučajna varijabla manja od 2,5?



Slika 6.7. Graf kumulativne funkcije razdiobe za zadanu slučajnu varijablu

Rješenje:

Analitički izraz kumulativne funkcije razdiobe dobiva se na osnovi zadanog njezina grafika:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ \ za\ x \le 0 \\ \dfrac{x}{2}, za\ 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{2}, za\ 1 < x \le 2 \\ \dfrac{x-1}{2}, za\ 2 < x \le 3 \\ 1, za\ x > 3 \end{cases}$$

Funkcija gustoće dobiva se diferenciranjem kumulativne funkcije razdiobe:

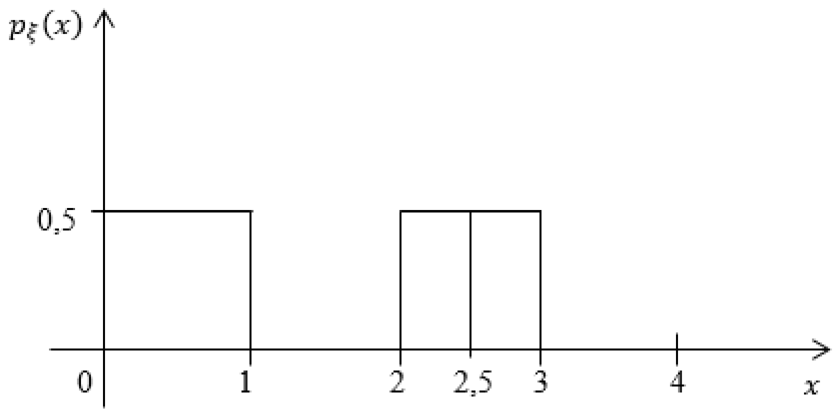
$$p_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ \ za\ x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}, za\ 0 < x \le 1 \\ 0, za\ 1 < x \le 2 \\ \dfrac{1}{2}, za\ 2 < x \le 3 \\ 0, za\ x > 3 \end{cases}$$

Tražena vjerojatnost može se izračunati na dva načina:

$$P\{\xi < 2{,}5\} = \int_{-\infty}^{2,5} p_\xi(x)dx = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P\{\xi < 2{,}5\} = F_\xi(2{,}5) - F_\xi(-\infty) = 0{,}75$$



Slika 6.8. Graf funkcije gustoće vjerojatnosti za zadanu slučajnu varijablu

Zadatak 6.3.

Zadana je gustoća vjerojatnosti slučajne varijable ξ kao

$$p_\xi(x) = ae^{-b|x|}, -\infty \leq x \leq +\infty$$

gdje su a i b konstante. Odredite odnos između a i b, te potom za slučaj $a = 1$, i funkcije gustoće i razdiobe vjerojatnosti.

Rješenje:

Veza između konstanti a i b nalazi se korištenjem uvjeta normiranja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$$

pa se dobiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-b|x|}dx = a\left[\int_{-\infty}^{0} e^{bx}dx + \int_{0}^{+\infty} ae^{-bx}dx\right] = \frac{2a}{b} = 1$$

Traženi odnos je onda:

$$b = 2a$$

Za $a = 1$ vrijedi:

$$p_\xi(x) = e^{-2|x|}, -\infty \leq x \leq +\infty$$

Funkcija razdiobe nalazi se kao:

Za $-\infty \leq x \leq 0$

$$F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = \frac{e^{2x}}{2}$$

Za $0 \leq x \leq +\infty$

$$F_\xi(x) = F_\xi(0) + \int_0^x p_\xi(t)\,dt = 1 - \frac{e^{-2x}}{2}$$

Zadatak 6.4.

Telefonski poziv pojavljuje se slučajno u vremenskom intervalu [0, *T*]. Potrebno je odrediti funkcije gustoće i razdiobe slučajne varijable ξ koja se definira kao:

$$\xi = \begin{cases} 1 \text{ ako se poziv pojavljuje u intervalu } [t_1, t_2] \\ 0 \text{ inače} \end{cases}$$

Vjerojatnost da se telefonski poziv pojavi u intervalu $[t_1, t_2]$ jest:

$$P\{t_1 \le t \le t_2\} = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

Rješenje:

Slučajna varijabla ξ je u ovom slučaju diskretna slučajna varijabla sa samo dvije vrijednosti koje može poprimiti: 0 i 1, a kojima su vjerojatnosti:

$$P\{\xi = 1\} = \frac{t_2 - t_1}{T} = p = F_\xi(1)$$

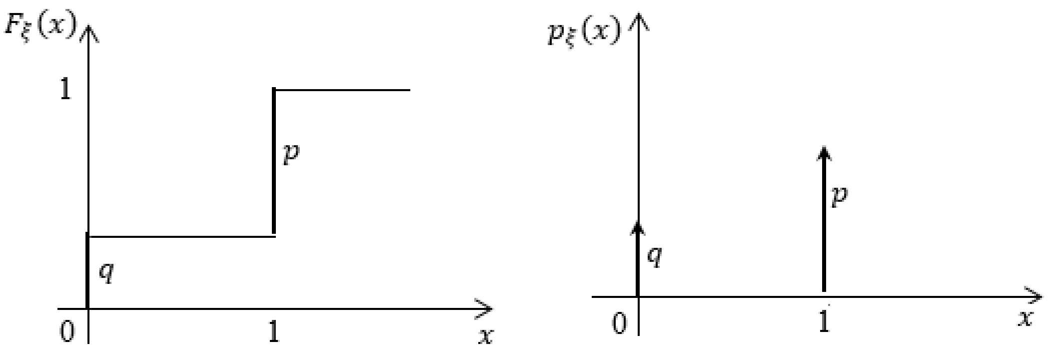
$$P\{\xi = 0\} = 1 - \frac{t_2 - t_1}{T} = 1 - p = q = F_\xi(0)$$

Kumulativna funkcija razdiobe za ovakvu slučajnu varijablu bit će izražena kao:

$$F_\xi(x) = P\{\xi = 1\} \cdot u(x-1) + P\{\xi = 0\} \cdot u(x-0) = p \cdot u(x-1) + q \cdot u(x)$$

dok je funkcija gustoće ove slučajne varijable:

$$p_\xi(x) = P\{\xi = 1\} \cdot \delta(x-1) + P\{\xi = 0\} \cdot \delta(x-0) = p \cdot \delta(x-1) + q \cdot \delta(x)$$



Slika 6.9. Grafovi kumulativne funkcije razdiobe i funkcije gustoće vjerojatnosti za zadanu slučajnu varijablu

Zadatak 6.5.

Otpor R ima nominalnu vrijednost 1 000 Ω i maksimalnu pogrešku ± 10%. Treba odrediti vjerojatnost da se vrijednost otpora R nalazi između 1 000 Ω i 1 050 Ω ako je otpor uniformno raspoređen na intervalu mogućih vrijednosti. Nacrtajte funkciju gustoće i funkciju razdiobe.

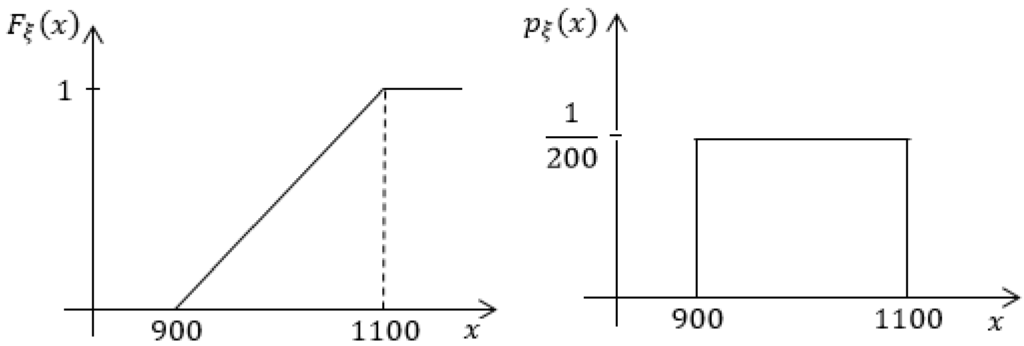
Rješenje:

Otpor R predstavlja kontinualnu slučajnu varijablu ξ kojoj je rang x

$$900 \leq x \leq 1\,100$$

Prema uvjetu zadatka, riječ je o uniformnoj razdiobi, pa će onda funkcija gustoće vjerojatnosti biti:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{200}, \text{za } 900 \leq x \leq 1\,100 \\ 0, \text{inače} \end{cases}$$



Slika 6.10. Grafovi funkcije gustoće vjerojatnosti i kumulativne funkcije razdiobe za zadanu slučajnu varijablu

Ove vrijednosti slijede iz uvjeta normiranja funkcije gustoće vjerojatnosti, to jest iz uvjeta da površina ispod krivulje funkcije gustoće mora biti jednaka 1.

Kumulativna funkcija razdiobe dobiva se na sljedeći način:

Za $x \leq 900$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = F_\xi(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt = 0$$

Za $900 \leq x \leq 1\,100$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = F_\xi(900) + \int_{900}^{x} p_\xi(t)\,dt = \frac{x - 900}{200}$$

Za $x > 1\,100$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = F_\xi(1\,100) + \int_{1100}^{x} p_\xi(t)\,dt = 1$$

Dobiva se, dakle, da je kumulativna funkcija razdiobe jednaka:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \ \ za\ x \leq 0 \\ \dfrac{x-900}{200} \ \ za\ 900 \leq x \leq 1\,100 \\ 1 \ \ za\ x > 1\,100 \end{cases}$$

Tražena vjerojatnost može se izračunati na dva načina:

$$P\{1\,000 < \xi < 1\,050\} = \int_{1\,000}^{1\,050} p_\xi(x)dx = 50 \cdot \frac{1}{200} = 0{,}25$$

$$P\{1\,000 < \xi < 1\,050\} = F_\xi(1\,050) - F_\xi(1\,000) = 0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$$

Zadatak 6.6.

Slučajna varijabla ξ uniformno je raspoređena na intervalu [-1, 1], i s vjerojatnosti 1/4 uzima svaku od vrijednosti na kraju intervala:

$$P\{\xi = 1\} = P\{\xi = -1\} = \frac{1}{4}$$

Odrediti kumulativnu funkciju razdiobe i funkciju gustoće vjerojatnosti. Zadatak riješiti grafički.

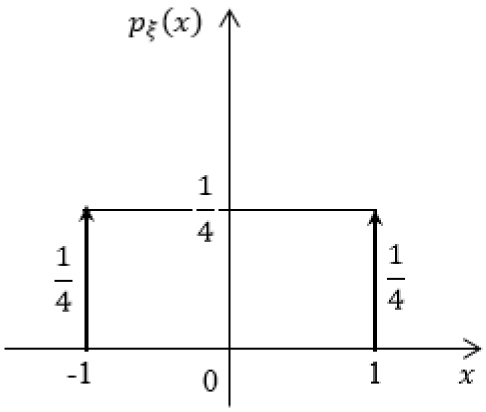
Rješenje:

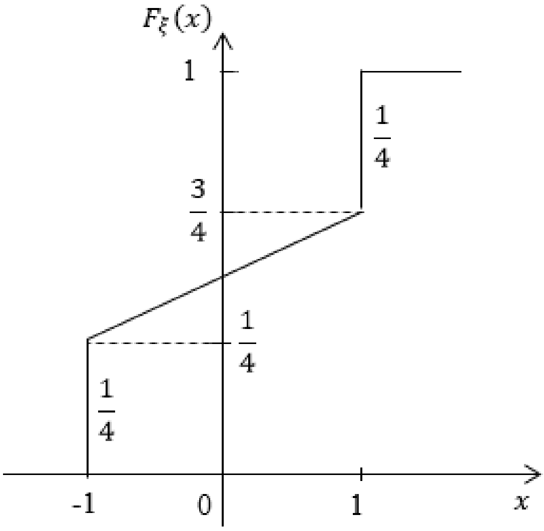
Slučajna varijabla ξ je diskretna na krajevima intervala, a unutar intervala je kontinualna, dakle je mješoviti tip slučajne varijable.

Funkcija gustoće imat će dva impulsa u točkama -1 i 1 visine $\frac{1}{4}$.

Na kontinualnom rangu funkcija gustoće je uniformna, to jest:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{4}, -1 < x < 1$$





Slika 6.11. Grafovi funkcije gustoće vjerojatnosti i kumulativne funkcije razdiobe za zadanu slučajnu varijablu

Na taj način je zadovoljen uvjet normiranja, to jest površina ispod krivulje gustoće vjerojatnosti jednaka je 1.

Zadatak 6.7.

Treba odrediti vjerojatnost da je slučajna varijabla iz prethodnog zadatka negativna.

Rješenje:

Zadatak se može riješiti na dva načina (s pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti ili kumulativne funkcije razdiobe vjerojatnosti) kako slijedi:

$$P\{\xi < 0\} = \int_{-\infty}^{0} p_\xi(x)dx = \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P\{\xi < 0\} = F_\xi(0) - F_\xi(-\infty) = \frac{1}{2}$$

Zadatak 6.8.

Po binarnom kanalu predaju se simboli 0 i 1. Apriorne vjerojatnosti predaje simbola su jednake. Odredite funkcije gustoće i razdiobe, te očekivanu vrijednost i varijancu slučajne varijable ξ na mjestu prijama ako je vjerojatnost da se primi 0, kad je poslana 0 jednaka

$$P(0|0) = q$$

a vjerojatnost da se primi 1, kad je poslana 1 jednaka

$$P(1|1) = p.$$

Rješenje:

Slučajna varijabla ξ predstavlja primljeni simbol i ima samo dvije vrijednosti: 0 i 1.

Na mjestu prijama pojavljuje se simbol 0 u dva slučaja:

- kad je poslana 0 i prenesena bez pogreške
- kad je poslana 1 ali je nastala pogreška u prijenosu.

Dakle, može se pisati:

$$P(\xi = 0) = P(0) \cdot P(0|0) + P(1) \cdot P(0|1) = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}(q-p+1)$$

Na mjestu prijama pojavljuje se simbol 1 na dva načina:

- kad je poslana 1 i prenesena bez pogreške
- kad je poslana 0, ali je nastala pogreška u prijenosu.

Dakle, može se pisati:

$$P(\xi = 1) = P(1) \cdot P(1|1) + P(0) \cdot P(1|0) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-q) = \frac{1}{2}(p-q+1)$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti bit će:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2}(q-p+1) \cdot \delta(x) + \frac{1}{2}(p-q+1) \cdot \delta(x-1)$$

Kumulativna funkcija razdiobe vjerojatnosti je:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2}(q-p+1) \cdot u(x) + \frac{1}{2}(p-q+1) \cdot u(x-1)$$

Očekivana vrijednost slučajne varijable bit će jednaka:

$$E\{\xi\} = 1 \cdot P(\xi = 1) + 0 \cdot P(\xi = 0) = \frac{1}{2}(p-q+1)$$

Srednjokvadratna vrijednost iznosi:

$$E\{\xi^2\} = 1^2 \cdot P(\xi = 1) + 0^2 \cdot P(\xi = 0) = \frac{1}{2}(p-q+1)$$

Pa je konačno varijanca:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{2}(p-q+1) - \frac{1}{4}(p-q+1)^2 = \frac{1}{4}(p-q+1)(1-p+q)$$

Zadatak 6.9.

Slučajna varijabla ξ uniformna je na intervalu [-a, a]. Treba pokazati da su njezini neparni momenti jednaki nuli i potom odrediti njezinu varijancu.

Rješenje:

Funkcija gustoće vjerojatnosti za zadanu slučajnu varijablu ξ iznosi:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, \text{za} - a \le x \le a \\ 0, \qquad \text{drugdje} \end{cases}$$

Neparni momenti računaju se kao:

$$m_{2n+1} = E\{\xi^{2n+1}\} = \int_{-a}^{a} x^{2n+1} \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{2(n+2)} \cdot \left[a^{2(n+1)} - (-a)^{2(n+1)}\right] = 0$$

pri čemu je $n = 0,1,2, \ldots$

Budući da je prvi moment jednak 0, za proračun varijance potrebno je još odrediti drugi moment:

$$m_2 = \int_{-a}^{a} x^2 \cdot \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{3} a^2$$

Varijanca je onda:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = m_2 = \frac{1}{3} a^2$$

Zadatak 6.10.

Pri mjerenju napona harmonijskih oscilacija

$$u(t) = U \sin(\omega t + \theta)$$

kazaljka voltmetra ravnomjerno oscilira između vrijednosti α_1 i α_2 zbog pojave smetnja. Treba odrediti prosječnu vrijednost pokazivanja voltmetra.

Rješenje:

Pokazivanje voltmetra je uniformna slučajna varijabla s funkcijom gustoće vjerojatnosti:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \text{za } \alpha_1 \le x \le \alpha_2 \\ 0, \qquad \text{drugdje} \end{cases}$$

Očekivana vrijednost ove slučajne varijable bit će:

$$\bar{\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_\xi(x) dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x \cdot \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} dx = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

7.

TRANSFORMACIJA SLUČAJNE VARIJABLE

Za opis rezultata slučajnog eksperimenta umjesto slučajne varijable ξ može se uzeti druga slučajna varijabla η ako je vrijednost varijable η jednoznačno određena vrijednošću ξ. Na primjer, umjesto slučajnog napona na krajevima nekog otpornika, možemo uzeti struju koja protječe kroz otpornik. Dakle, riječ je o istom slučajnom eksperimentu, samo što se opisuje drugom slučajnom varijablom. Matematički to znači sljedeće:

$$\eta = f(\xi)$$

Postavlja se najvažnije pitanje: ako je poznata razdioba vjerojatnosti slučajne varijable ξ, kako se može odrediti razdioba vjerojatnosti slučajne varijable $\eta = f(\xi)$? Pri tome se pretpostavlja da je f poznata realna funkcija.

Monotona tranformacija

Uzmimo da je ξ neprekidna slučajna varijabla, i da je njezina razdioba vjerojatnosti zadana s pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti $p_\xi(x)$. Najjednostavnije je naći gustoću vjerojatnosti $p_\eta(y)$ za $\eta = f(\xi)$ ako je funkcija f monotona jer tada ne samo da je za danu vrijednost x slučajne varijable ξ jednoznačno određena odgovarajuća vrijednost varijable η, $y = f(x)$ nego je i obratno, s $\eta = y$ određena vrijednost $\xi = x$. Ukratko, tada postoji inverzna funkcija $g = f^{-1}$, za koju je $x = g(y)$ jedino rješenje jednadžbe $f(x) - y = 0$.

Postupak izvođenja izraza za gustoću vjerojatnosti slučajne varijable $\eta = f(\xi)$ ovdje nećemo opisivati. Krajnji rezultat koji opisuje vezu između gustoća vjerojatnsti bit će:

$$p_\eta(y) = \left.\frac{p_\xi(x)}{|f'(x)|}\right|_{x=g(y)}$$

Ova relacija vrijedi za bilo koju monotonu transformaciju slučajne varijable.

Zadatci za vježbu

Zadatak 7.1.

Treba pokazati da slučajna varijabla ξ s uniformnom razdiobom vjerojatnosti na intervalu $[x_1, x_2]$, nakon linearne transformacije:

$$\eta = a\xi + b \qquad a > 0$$

opet ima uniformnu razdiobu vjerojatnosti.

Rješenje:

Gustoća slučajne varijable je uniformna:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_2 - x_1}, & \text{za } x_1 \le x \le x_2 \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases}$$

Veza između ξ i η jednoznačno je određena:

$$y = ax + b$$

pa je odatle:

$$x = \frac{y - b}{a}$$

Kako je

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = a$$

to će prema izrazu za računanje funkcije gustoće vjerojatnosti za novonastalu slučajnu varijablu biti:

$$p_\eta(y) = \frac{p_\xi(x)}{|f'(x)|}\bigg|_{x=\frac{y-b}{a}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{a}\bigg|_{x=\frac{y-b}{a}}$$

$$p_\eta(y) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{y_2 - b}{a} - \frac{y_1 - b}{a}} = \frac{1}{y_2 - y}$$

dakle,

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y_2 - y}, & \text{za } y_1 \le y \le y_2 \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases}$$

pa je time pokazano da je slučajna varijabla η uniformna na intervalu $y_1 \le y \le y_2$.

Zadatak 7.2.

Otpor R je slučajna varijabla s uniformnom razdiobom vjerojatnosti u opsegu [1 000 ± 10 %] Ω. Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti za provodnost G.

Rješenje:

Definirajmo slučajnu varijablu ξ kao vrijednost otpora R, a slučajnu varijablu η kao vrijednost provodnosti G, pri čemu je veza između ove dvije slučajne varijable jednoznačno definirana kao:

$$\eta = \frac{1}{\xi},$$

to jest:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Kako je funkcija gustoće slučajne varijable ξ uniformna, pa vrijedi:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{200}, & \text{za } 900 \le x \le 1100 \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases}$$

a prema izrazu za monotonu transformaciju slučajne varijable, dobiva se:

$$p_\eta(y) = \left.\frac{p_\xi(x)}{|f'(x)|}\right|_{x=\frac{1}{y}} = \left.\frac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{x^2}}\right|_{x=\frac{1}{y}} = \frac{1}{200y^2}$$

to jest:

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{200y^2}, & \text{za } \dfrac{1}{1100} \le y \le \dfrac{1}{900} \\ 0, & \text{drugdje} \end{cases}$$

Zadatak 7.3.

Slučajna varijabla ξ ima funkciju gustoće vjerojatnosti

$$p_\xi\,(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & inače \end{cases}$$

Treba odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable

$$\eta = \frac{\sigma}{\xi}.$$

Rješenje:

Budući da vrijedi:

$$y = \frac{\sigma}{x}$$

to je:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \frac{\sigma}{x^2}$$

Tražena funkcija gustoće slučajne varijable η dobiva se prema izrazu za monotonu transformaciju slučajne varijable kao:

$$p_\eta(y) = \frac{p_\xi(x)}{|f'(x)|}\bigg|_{x=\frac{\sigma}{y}} = \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{x^2}{\sigma}\bigg|_{x=\frac{\sigma}{y}} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma}{y} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \frac{\sigma^2}{y^2}} \cdot \frac{\sigma}{y^2}$$

$$p_\eta(y) = \frac{e^{-\frac{1}{2y^2}}}{y^3}, \qquad 0 \le y \le +\infty$$

pri čemu vrijedi i:

$$p_\eta(y) = 0, \quad y < 0.$$

Zadatak 7.4.

Slučajna varijabla uniformna je na intervalu [0, 1]. Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable:

$$\eta = -\ln\xi\ .$$

Rješenje:

Transformacija

$$y = -\ln x$$

je jednoznačna, pa će biti:

$$x = e^{-y}$$

i:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \left|-\frac{1}{x}\right|$$

a budući da sigurno vrijedni da je $x > 0$, možemo pisati:

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \frac{1}{x}$$

Primjenom izraza za monotonu transformaciju slučajne varijable, a uzimajući u obzir da slučajna varijabla ξ ima uniformnu razdiobu na intervalu [0, 1], dobiva se:

$$p_\eta(y) = \left.\frac{p_\xi(x)}{|f'(x)|}\right|_{x=e^{-y}} = \left. x\right|_{x=e^{-y}} = e^{-y}, \qquad 0 \le y \le +\infty$$

to jest:

$$p_\eta(y) = 0, \quad y < 0.$$

8.

DISKRETNE RAZDIOBE VJEROJATNOSTI

Binomijalna razdioba

Promatrajmo slučajni eksperiment s dva moguća ishoda: A („uspjeh") i $\bar{A}$ („neuspjeh").

Vjerojatnost uspjeha označimo s p, vjerojatnost neuspjeha s q, $q = 1 - p$. Ako se eksperiment ponavlja n puta, mogući ishodi su nizovi A i $\bar{A}$:

$$AAA \dots A;\ \bar{A}AA \dots A;\ \dots;\ \bar{A}\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}$$

Pretpostavit ćemo da se uvjeti eksperimenta ne mijenjaju. Također, pretpostavit ćemo i da su svi ti eksperimenti međusobno nezavisni, to jest da ishodi prethodnih eksperimenata ne utječu na vjerojatnost ishoda u sljedećemu.

Vjerojatnost da se u seriji od n eksperimenata A pojavi k puta, a $\bar{A}$ $n - k$ puta, dana je izrazom:

$$P(\xi = k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Pritom su:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

binomijalni koeficijenti i razdioba se naziva binomijalnom. Često se za slučajnu varijablu ξ koristi oznakom:

$$\xi = \mathrm{Bi}(n, p)$$

Prosječna vrijednost i varijanca su:

$$\bar{\xi} = np; \qquad \sigma_\xi^2 = npq$$

Poissonova razdioba

Ova je razdioba granični slučaj binomne razdiobe u slučaju kada $n \to \infty$, ali uz uvjet da istovremeno $p \to 0$ i to tako da prosječna vrijednost np ostaje konstantna. Dakle, zanima nas:

$$\lim_{n \to \infty} \xi \quad \text{pri} \quad n \cdot p = a = k\text{onst.}$$

Rješavanjem ovog limesa dobiva se kako je vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi vrijednost k jednaka:

$$P(\xi = k) = p(k; a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

Ovime definirana razdioba vjerojatnosti naziva se *Poissonovom*, a slučajna varijabla označava se s:

$$\xi = \mathrm{Po}(a)$$

Statistički parametri su:

$$\bar{\xi} = a; \qquad \sigma_\xi^2 = a$$

Zadatci za vježbu

Zadatak 8.1.

Proizvodi neke velike serije koja sadržava 0,7% škarta, pakiraju se u kutije po 100 komada. Kolik će postotak kutija biti bez ijednog škarta, a kolik s dva ili više škartova?

Rješenje:

U zadatku je riječ o binomijalnoj razdiobi sa sljedećim zadanim parametrima:

$$n = 100$$
$$p = 0{,}007$$

to jest:

$$q = 1 - p = 0{,}993$$

Primjenom izraza za binomijalnu razdiobu diskretne slučajne varijable:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n$$

za prvi slučaj dobiva se ($k = 0$):

$$P(\xi = 0) = \binom{100}{0} p^0 q^{100-0} = 0{,}993^{100} = 0{,}4954$$

ili u postotcima:

$$P(\xi = 0) = 49{,}54\ \%$$

U drugom slučaju će tražena vjerojatnost iznositi:

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1)$$

Budući da smo vjerojatnost već izračunali, preostaje još da se izračuna i vjerojatnost $P(\xi = 1)$:

$$P(\xi = 1) = \binom{100}{1} p^1 q^{100-1} = 100 \cdot 0{,}007 \cdot 0{,}993^{99} = 0{,}3492$$

$$P(\xi = 1) = 34{,}92\ \%$$

Sada je konačno vjerojatnost $P(\xi \geq 2)$ jednaka:

$$P(\xi \geq 2) = 1 - 0{,}4954 - 0{,}3492 = 0{,}1554$$

$$P(\xi \geq 2) = 15{,}54\ \%$$

Zadatak 8.2.

Na ulaz radarskog uređaja dolazi pri svakom okretu antene 8 reflektiranih impulsa. Treba odrediti prosječan broj impulsa koji dođu do ulaza prijamnika pri jednom okretu antene ako je vjerojatnost da dođe jedan impuls p = 0,75. Kolika je varijanca?

Rješenje:

Slučajna varijabla koja predstavlja broj impulsa što dođu do ulaza prijamniku pri jednom okretu antene, opisana je binomijalnom razdiobom sa sljedećim zadanim parametrima:

$$n = 8$$
$$p = 0{,}75$$

Primjenom izraza za prosječnu vrijednosti i varijancu binomijalne slučajne varijable dobiva se:

$$\overline{\xi} = np = 8 \cdot 0{,}75 = 6$$

$$\sigma_\xi^2 = npq = np(1-p) = 8 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$$

Zadatak 8.3.

U telefonskoj centrali tijekom 1 sata bilo je 240 poziva. Odredite vjerojatnost da tijekom 1 minute:

a) nije bilo nijednog poziva
b) bila su barem dva poziva.

Rješenje:

Slučajna varijabla ξ u ovom slučaju predstavlja broj poziva u telefonskoj centrali i opisana je Poissonovom razdiobu sa zadanim parametrom:

$$a = \frac{240 \text{ poziva}}{1 \text{ h}} = \frac{240 \text{ poziva}}{60 \text{ min}} = 4 \frac{\text{poziva}}{\text{min}}$$

a) Vjerojatnost da se tijekom 1 minute ne dogodi ni jedan poziv dobiva se primjenom izraza za Poissonovu razdiobu:

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

kad se uvrsti $k = 0$, odnosno:

$$P(\xi = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = e^{-4} = 0{,}018$$

b) Vjerojatnost da se tijekom 1 minute dogode barem dva poziva (dva ili više) računamo na sljedeći način, također primjenom izraza za Poissonovu razdiobu:

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1)$$

$$P(\xi = 1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 4e^{-4} = 0{,}072$$

to jest:

$$P(\xi \geq 2) = 1 - 0{,}018 - 0{,}072 = 0{,}91$$

Zadatak 8.4.

Impulsna je smetnja karakterizirana Poissonovim zakonom. Prosječni broj impulsa koji se pojavljuju u jednoj sekundi je 10^4. Odredite vjerojatnost da se barem jedan impuls pojavi u 100μs.

Rješenje:

Za slučajnu varijablu iz zadatka poznat je sljedeći parametar:

$$a = \frac{10^4 \text{ impulsa}}{1 \text{ s}} = \frac{10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \text{ impulsa}}{100 \text{ μs}} = 1 \frac{\text{impuls}}{100 \text{ μs}}$$

Primjenom izraza za Poissonovu razdiobu, tražena vjerojatnost se dobiva kao:

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}632$$

Zadatak 8.5.

S ciljem zaštite od smetnji u PCM sustavu, formira se niz samo od parnog broja impulsa. Kombinacije s neparnim brojem impulsa prijamnik odbacuje (paritetno kodiranje).

Neka je formirana kombinacija od četiri impulsa 0 i dva impulsa 1.

Zbog djelovanja smetnja, svaki od impulsa 1 može nestati s vjerojatnošću 0,04, a na svakoj 0 se može pojaviti lažni impuls s vjerojatnošću 0,4. Pretpostavlja se da smetnje djeluju neovisno.

Izračunajte vjerojatnost nastupanja neotkrivene pogreške samo zbog pojave lažnih impulsa.

Rješenje:

Lažni impuls pojavljuje se na mjestu 0.

Neotkrivena pogreška nastaje kada je broj lažnih impulsa jednak 2 ili 4 (paran), to jest primjenom izraza za binomijalnu razdiobu:

$$P_e = P(\xi = 2) + P(\xi = 4) = \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} + \binom{n}{4} p^4 q^{n-4}$$

Kako je:

$$n = 4$$
$$p = 0{,}4$$
$$q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

dobiva se:

$$P_e = \binom{4}{2} 0{,}4^2 0{,}6^2 + \binom{4}{4} 0{,}4^4 0{,}6^0 = 0{,}3456 + 0{,}00256 = 0{,}37$$

Zadatak 8.6.

U PCM sustavu formira se niz samo od neparnog broja impulsa. Kombinacije s parnim brojem impulsa prijamnik odbacuje.

Neka je poslana kombinacija od tri impulsa 0 i tri impulsa 1.

Zbog djelovanja smetnji, svaki od impulsa 1 može se prigušiti s vjerojatnošću 0,04, a na svakoj 0 može se pojaviti lažni impuls s vjerojatnošću 0,4. Pretpostavlja se da smetnje djeluju neovisno.

a) Izračunajte vjerojatnost nastupanja neotkrivene pogreške samo zbog pojave lažnih impulsa.
b) Izračunajte vjerojatnost nastupanja neotkrivene pogreške samo zbog prigušivanja impulsa.

Rješenje:

a) Broj lažnih impulsa može biti

$$0, 1, 2, 3.$$

Budući da postoje tri znaka 1, to će neotkrivena pogreška nastupiti samo ako se pojave dva lažna impulsa. Iz toga slijedi da je vjerojatnost neotkrivene pogreške zbog pojave lažnog impulsa:

$$P_e = \binom{3}{2} 0{,}4^2 0{,}6^1 = 0{,}288$$

b) Broj prigušenih impulsa može biti

$$0, 1, 2, 3.$$

Neotkrivena pogreška nastaje samo kad je jedan impuls prigušen, to jest:

$$P_e = \binom{3}{1} 0{,}04^1 0{,}96^2 = 0{,}111$$

Zadatak 8.7.

Mjesto A treba povezati telefonskom vezom s 10 korisnika mjesta B. Svaki korisnik zauzima liniju, neovisno jednoga o drugom, 12 minuta na sat.

Koji je najmanji broj telefonskih linija potreban da se u proizvoljnom trenutku s vjerojatnošću 0,99 mogu poslužiti svi korisnici?

Rješenje:

Vjerojatnost da je bilo koja linija zauzeta iznosi:

$$p = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Prema uvjetu zadatka, vjerojatnost da je manje od k_1 linija zauzeto, iznosi 0,99:

$$P(\xi < k_1) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + \cdots + P(\xi = k_1) = 0{,}99$$

$$P(\xi < k_1) = \sum_{k=0}^{k_1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$$= \binom{10}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^9 + \cdots + \binom{10}{k_1}\left(\frac{1}{5}\right)^{k_1} \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k_1} = 0.99$$

Iz izraza slijedi da je $k_1 \approx 5$.

9.

SLUČAJNI PROCESI

Dosad smo slučajne događaje, slučajne varijable i odgovarajuće razdiobe vjerojatnosti promatrali statički, a sad im dodajemo novu dimenziju – vrijeme.

Općenito, slučajnom funkcijom nazivamo funkciju koja svakoj vrijednosti promjenjive t iz nekog skupa $\{t\}$ pridružuje slučajnu varijablu $\xi_t = \xi(t)$. Najčešće je t vrijeme, a T označava beskonačni interval $(-\infty, \infty)$ ili $[0, \infty)$, ili neki konačni interval. Tada se $t \rightarrow \xi(t)$ naziva *slučajnim procesom*.

Ovisno o tome kakva je slučajna varijabla $\xi(t)$, razlikujemo diskretne i kontinualne procese. Kod diskretnog procesa, rang slučajne varijable $\xi(t)$ diskretan je za proizvoljno t, a kod kontinualnog je rang $\xi(t)$ neki interval, konačan ili beskonačan.

Kompletnija definicija slučajnog procesa polazi od vjerojatnosnog prostora (S, A, P). Obična slučajna varijabla ξ je preslikavanje skupa S elementarnih događaja u skup realnih brojeva, tako da svakome elementarnom događaju $s \in S$ odgovara broj $\xi(s)$. Analogno tome, slučajna funkcija je onda funkcija dvije promjenjive:

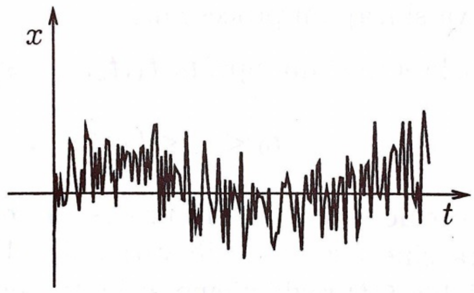
$$\xi : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$$

s vrijednostima $\xi(s, t)$, $s \in S$, $t \in T$. Tu funkciju možemo promatrati na dva načina:

a) Za svako $t \in T$ imamo funkciju $s \rightarrow \xi(s, t) = \xi_t(s)$, to jest preslikavanje S u $\mathbb{R}$, a to nije ništa drugo nego slučajna varijabla, koju smo već označili s $\xi_t = \xi(t)$. Vidimo da se slučajni proces svodi na familiju slučajnih varijabli.

b) Za svako fiksirano $s \in S$ dobivamo realnu funkciju $\xi(s, t) = x_s(t)$ – realizaciju slučajnog procesa. Slučajni je proces onda skup (ansambl) svih mogućih realizacija. Važno je naglasiti da se u eksperimentu opažaju upravo realizacije slučajnog procesa.

Klasičan primjer slučajnog procesa je Brownovo gibanje – gibanje mikroskopske čestice (npr. zrnca polena) u tekućini. Zbog sudara s molekulama tekućine, čestica se giba veoma nepravilno (kaotično), i ovisnost jedne od njezinih koordinata o vremenu može se prikazati grafikom oblika prikazanoga na slici.



Slika 9.1. Primjer slučajnog procesa

Za neku drugu česticu (jednake mase i oblika, u istoj tekućini), funkcija $x = x(t)$ će imati sličnu neregularnu formu, ali će biti različita od prve. Možemo smatrati da se radi o raznim realizacijama jednog slučajnog procesa.

Analogno tome, na krajevima otpornika zbog termičkih fluktuacija, javlja se napon (termički šum) koji se može registrirati osjetljivim instrumentom i predstavljen je krivuljom sličnog oblika kao na prethodnoj slici. Za drugi otpornik istih karakteristika, imat ćemo drugu krivulju srodnu prvoj, i ponovno možemo smatrati da se radi o različitim realizacijama jednog slučajnog procesa.

Sad je pitanje kako se opisuje razdioba vjerojatnosti jednog slučajnog procesa. Ako se ansambl sastoji od konačno mnogo realizacija, onda se može zadati vjerojatnost svake od njih. No, mnogo češće postoji beskonačno mnogo realizacija slučajnog procesa. Zato se obično razdioba vjerojatnosti zadaje na drugi način, polazeći od interpretacije slučajnog procesa kao familije slučajnih varijabla.

Prije svega, potrebna je razdioba vjerojatnosti za slučajnu varijablu $\xi(t)$ za proizvoljno t; možemo je zadati uz pomoć gustoće:

$$p_{\xi_t}(x) = p_\xi(x;t), \quad -\infty < x < \infty$$

Kad se zna $p_\xi(x;t)$, možemo naći prosječne vrijednosti poput:

$$m_\xi(t) = \overline{\xi(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x;t)dx$$

$$\overline{\xi(t)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x;t)dx$$

$$var(\xi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi(t))^2 p_\xi(x;t)dx$$

No, ovo nije dovoljno jer iz $p_\xi(x;t)$ ne možemo dobiti nikakvu informaciju o uzajamnom odnosu varijabla $\xi(t_1)$ i $\xi(t_2)$ koje odgovaraju različitim trenutcima t_1 i t_2. S tom svrhom, potrebna je zajednička razdioba vjerojatnosti za *ξ(t₁)* i *ξ(t₂)*, koju ćemo zadati uz pomoć zajedničke gustoće vjerojatnosti:

$$p_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}}(x_1, x_2) = p_{\xi\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

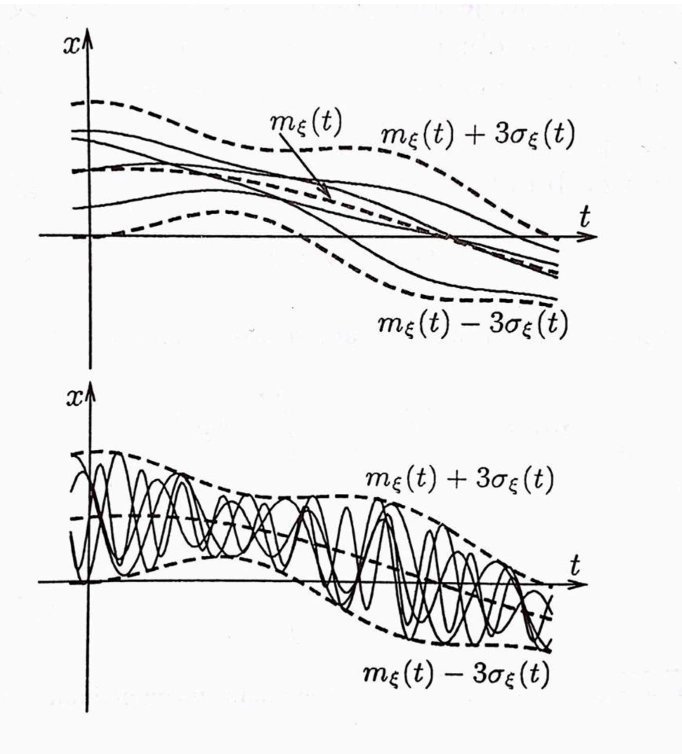
koju nazivamo gustoćom vjerojatnosti drugog reda za proces *ξ(t)*.

Općenito, uvode se tzv. konačno dimenzionalne razdiobe vjerojatnosti. Gustoća, reda *n* je:

$$p_{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\cdots\xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\xi\dots\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Očekivana vrijednost $m_\xi(t)$ i varijanca $var(\xi(t))$ sadržavaju važnu informaciju o slučajnom procesu. Realizacije procesa *ξ(t)* predočene su krivuljama *x* = *x(t)* koje najvećim dijelom leže u pojasu širine $3\sigma_\xi(t)$ oko $m_\xi(t)$. No, samo na osnovi tih veličina ne možemo ništa reći o samim funkcijama *x* = *x(t)*, to jest kako se one brzo ili sporo mijenjaju unutar pojasa $m_\xi(t) \pm 3\sigma_\xi(t)$.

Na sljedećim slikama prikazane su realizacije veoma različitih procesa koji imaju jednake vrijednosti $m_\xi(t)$ i $\sigma_\xi(t)$.



Slika 9.2. Primjer realizacija različitih slučajnih procesa

Ključnu informaciju o brzini izmjene tipične realizacije slučajnog procesa sadržava *autokorelacijska funkcija* procesa:

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{\xi\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

kao i funkcija autokovarijance:

$$C_{\xi\xi}(t_1, t_2) = cov\big(\xi(t_1)\xi(t_2)\big) = \overline{(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))}$$
$$= R_{\xi\xi}(t_1, t_2) - m_\xi(t_1)m_\xi(t_2)$$

Općenito možemo očekivati da je $R_{\xi\xi}(t_1, t_2)$ blisko prosječnoj vrijednosti $\overline{\xi(t_1)^2}$ kad t_2 odstupa od t_1 manje od karakterističnog vremena izmjene realizacije procesa, dakle tada imamo visok stupanj korelacije između $\xi(t_1)$ i $\xi(t_2)$.

Za potpun opis slučajnog procesa općenito su potrebne gustoće i momentne funkcije viših redova, no najčešće se koristi funkcijama prvoga i drugog reda.

Osobine korelacijskih funkcija

1) Autokorelacijska funkcija je simetrična funkcija svojih argumenata

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi\xi}(t_2, t_1)$$

2) Za jednake vrijednosti argumenata autokorelacijska funkcija se svodi na *snagu* procesa

$$R_{\xi\xi}(t, t) = \overline{\xi(t)^2}$$

3) Veza s funkcijom autokovarijance

$$C_{\xi\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi\xi}(t_1, t_2) - \overline{\xi(t_1)} \cdot \overline{\xi(t_2)}$$

Stacionarni slučajni procesi

Važnu grupu slučajnih procesa čine tzv. stacionarni procesi. Dvije su vrste stacionarnosti.

Slučajni proces striktno je stacionaran, ili stacionaran u užem smislu, ako su mu sve konačno-dimenzinalne razdiobe vjerojatnosti invarijantne s obzirom na proizvoljne translacije u vremenu. To znači da je:

$$p_\xi(x; t + \Delta t) = p_\xi(x; t)$$
$$p_{\xi\xi}(x_1, x_2; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t) = p_{\xi\xi}(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

i općenito

$$p_{\xi\xi\ldots\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, \ldots, t_n + \Delta t) = p_{\xi\xi\ldots\xi}(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

Konačno, slučajni proces je stacionaran u širem smislu ako su mu prosječna vrijednost i autokorelacijska funkcija invarijantne s obzirom na proizvoljne pomake u vremenu:

$$m_\xi(t+\Delta t) = m_\xi(t)$$
$$R_{\xi\xi}(t_1+\Delta t, t_2+\Delta t) = R_{\xi\xi}(t_1, t_2)$$

Ergodični slučajni procesi

Ergodičnim nazivamo one slučajne procese kod kojih se usrednjavanje po ansamblu može zamijeniti usrednjavanjem po vremenu.

Vremenska prosječna vrijednost slučajnog procesa u intervalu (-*T*, *T*) bit će:

$$\eta_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \xi(t)dt$$

Prosječna vrijednost na čitavoj vremenskoj osi je

$$\eta = \langle(\xi(t))\rangle_t = \lim_{T\to\infty} \eta_T$$

Ovo je slučajna varijabla koja ne ovisi od *t*. S druge strane, usrednjavanjem po ansamblu dobivamo funkciju vremena $\overline{\xi(t)}$. Uvjet ergodičnosti je:

$$\eta = \overline{\xi(t)}$$

to jest:

$$\eta = m_\xi$$

Zadatci za vježbu

Zadatak 9.1.

Zadan je slučajni proces $\xi(t)=\rho\cos(\omega t+\theta)$, gdje su ρ i θ međusobno neovisne slučajne varijable s ravnomjernim razdiobama vjerojatnosti:

$$p_\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & za\ 0 \le r \le 2a \\ 0 & inače \end{cases}$$

$$p_\theta(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & za\ 0 \le v \le 2\pi \\ 0 & inače \end{cases}$$

a ω je konstanta.

Je li ovaj slučajni proces stacionaran?

Rješenje:

Budući da su ρ i θ međusobno nezavisne slučajne varijable, zajednička gustoća vjerojatnosti bit će zadana sljedećim izrazom:

$$p_{\rho\theta}(r, v) = p_\rho(r) \cdot p_\theta(v)$$

Slučajni proces zadan je kao:

$$\xi(t) = \rho \cdot \cos(\omega t + \theta) = \rho \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin\theta$$

Prosječna vrijednost slučajnog procesa (zbog neovisnosti slučajnih varijabli moguće je pojednostaviti tako da se prosječna vrijednost umnoška zamijeni umnoškom prosječnih vrijednosti):

$$\begin{aligned} m_\xi(t) = \overline{\xi(t)} &= \overline{\rho \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin\theta} \\ &= \overline{\rho \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos\theta} - \overline{\rho \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin\theta} \\ &= \overline{\rho} \cdot \cos(\omega t) \cdot \overline{\cos\theta} - \overline{\rho} \cdot \sin(\omega t) \cdot \overline{\sin\theta} \end{aligned}$$

$$\overline{\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \cos v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos v\, dv = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin v \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\overline{\sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin v\, dv = \frac{1}{2\pi} \cdot (-\cos v) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Dobiva se da je prosječna vrijednost:

$$m_\xi(t) = 0$$

Autokorelacijska funkcija traži se na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &R_{\xi\xi}(t_1, t_2) \\ &= \overline{(\rho \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \sin\theta) \cdot (\rho \cdot \cos(\omega t_2) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t_2) \cdot \sin\theta)} \\ &= \overline{\rho^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) + \overline{\rho^2 \cdot \sin^2\theta} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) - \overline{\rho^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta} \\ &\cdot \cos(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) - \overline{\rho^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) \end{aligned}$$

Ponovno, zbog nezavisnosti slučajnih varijabli:

$$\overline{\rho^2 \cdot \cos^2\theta} = \overline{\rho^2} \cdot \overline{\cos^2\theta}$$

Sad tražimo sve potrebne prosječne vrijednosti:

$$\overline{\rho^2} = \int_0^{2a} \frac{1}{2a} \cdot r^2 dr = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} r^2 dr = \frac{1}{2a} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a} = \frac{4}{3} a^2$$

$$\overline{\cos^2 \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \cos^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2v}{2} dv$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2v}{2} dv = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2v\, dv$$
$$= \frac{1}{4\pi} \cdot v \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sin 2v}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\sin^2 \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2v}{2} dv$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dv - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2v}{2} dv = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2v\, dv$$
$$= \frac{1}{4\pi} \cdot v \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sin 2v}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin v \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \cos v\, dv = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin v \cdot \cos v\, dv = \begin{bmatrix} \sin v = t \\ \cos v\, dv = dt \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \int t dt = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\sin^2 v}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$R_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \overline{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) + \overline{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) - 0 - 0$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{\rho^2} \cdot (\cos(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2))$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{\rho^2} \cdot \cos \omega(t_2 - t_1) = \frac{2}{3} a^2 \cdot \cos \omega\tau$$

Autokorelacijska funkcija ne ovisi o pojedinim trenutcima t_1 i t_2, nego samo o intervalu između njih, pa se u ovom slučaju radi o slučajnom procesu koji je stacionaran u širem smislu (uzimajući u obzir da je i prvi uvjet za prosječnu vrijednost ispunjen).

Zadatak 9.2.

Zadan je slučajni proces *ξ(t)=m+ρcos(ωt+θ)*, gdje su ρ i θ međusobno neovisne slučajne varijable s ravnomjernim razdiobama vjerojatnosti:

$$p_\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & za\ 0 \le r \le 2a \\ 0 & inače \end{cases}$$

$$p_\theta(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & za\ 0 \le v \le 2\pi \\ 0 & inače \end{cases}$$

a m i ω konstante.

Je li ovaj slučajni proces ergodičan?

Rješenje:

Slučajni proces je zadan kao:

$$\xi(t) = m + \rho \cdot \cos(\omega t + \theta) = m + \rho \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin\theta$$

Prosječna vrijednost slučajnog procesa određuje se kao:

$$\begin{aligned} m_\xi(t) = \overline{\xi(t)} &= \overline{m + \rho \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin\theta} \\ &= \overline{m} + \overline{\rho \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos\theta} - \overline{\rho \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin\theta} \\ &= m + \overline{\rho} \cdot \cos(\omega t) \cdot \overline{\cos\theta} - \overline{\rho} \cdot \sin(\omega t) \cdot \overline{\sin\theta} \end{aligned}$$

$$\overline{\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \cos v \, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos v \, dv = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin v \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\overline{\sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin v \, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin v \, dv = \frac{1}{2\pi} \cdot (-\cos v) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

To jest:

$$m_\xi(t) = 0$$

Autokorelacijska funkcija se određuje na sljedeći način:

$$\begin{aligned} &R_{\xi\xi}(t_1, t_2) \\ &= \overline{(m + \rho \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \sin\theta) \cdot (m + \rho \cdot \cos(\omega t_2) \cdot \cos\theta - \rho \cdot \sin(\omega t_2) \cdot \sin\theta)} \\ &= m^2 + m \cdot \overline{\rho} \cdot \cos(\omega t_2) \cdot \overline{\cos\theta} - m \cdot \overline{\rho} \cdot \sin(\omega t_2) \cdot \overline{\sin\theta} + m \cdot \overline{\rho} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \overline{\cos\theta} - m \cdot \overline{\rho} \\ &\cdot \sin(\omega t_1) \cdot \overline{\sin\theta} + \overline{\rho^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) + \overline{\rho^2 \cdot \sin^2\theta} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) \\ &- \overline{\rho^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) - \overline{\rho^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) \\ &= m^2 + \overline{\rho^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) - \overline{\rho^2 \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) \\ &- \overline{\rho^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) + \overline{\rho^2 \cdot \sin^2\theta} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) \end{aligned}$$

$$\overline{\rho^2} = \int_0^{2a} \frac{1}{2a} \cdot r^2 dr = \frac{1}{2a} \int_0^{2a} r^2 dr = \frac{1}{2a} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2a} = \frac{4}{3} a^2$$

$$\begin{aligned}\overline{\cos^2 \theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \cos^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2v}{2} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dv + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2v}{2} dv = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2v\, dv \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot v \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sin 2v}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\sin^2 \theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 v\, dv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2v}{2} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dv - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2v}{2} dv = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} dv - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2v\, dv \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot v \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\sin 2v}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\sin \theta \cdot \cos \theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin v \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \cos v\, dv = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin v \cdot \cos v\, dv = \begin{bmatrix} \sin v = t \\ \cos v\, dv = dt \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int t dt = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\sin^2 v}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{\xi\xi}(t_1, t_2) &= m^2 + \overline{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) + \overline{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2) \\ &= m^2 + \frac{1}{2} \cdot \overline{\rho^2} \cdot (\cos(\omega t_1) \cdot \cos(\omega t_2) + \sin(\omega t_1) \cdot \sin(\omega t_2)) \\ &= m^2 + \frac{1}{2} \cdot \overline{\rho^2} \cdot \cos \omega (t_2 - t_1) = m^2 + \frac{2}{3} a^2 \cdot \cos \omega\tau\end{aligned}$$

Da bi uvjet ergodičnosti s obzirom na autokorelacijsku funkciju bio ispunjen, potrebno je da autokorelacijska funkcija bude jednaka konstanti. U ovom slučaju to nije ispunjeno pa zaključujemo da slučajni proces nije ergodičan s obzirom na autokorelacijsku funkciju.

LITERATURA

[1] Nastavni materijali (predavanja i vježbe) s kolegija Osnove komunikacija, preddiplomski studij Elektrotehničke i komunikacijske tehnologije u pomorstvu

[2] Nastavni materijali (predavanja i vježbe) s kolegija Statistička teorija telekomunikacija, diplomski studij Elektrotehničke i komunikacijske tehnologije u pomorstvu

[3] B. Carlson: *Communication Systems*, Mc Graw Hill Inc., Tokyo, 1975.

[4] Y. W. Lee: *Statistical Theory of Communication*, John Wiley, Inc., N. Y., 1975.

[5] A. Papoulis: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc Graw Hill Inc., N. Y., 1980.

[6] K. Suruliz, M. Hadžialić: *Statistička teorija telekomunikacija*, Elektrotehnički fakultet, Sarajevo, 2009.